SOLUZIONE PROBLEMA 1

Punto 1
Osserviamo anzitutto che la funzione

$$g(x) = (ax+b)e^{2x-x^2}$$

è continua e derivabile in $\mathbf{R}$ in quanto composizione di funzioni continue e derivabili.
Per discutere la presenza di punti di massimo e minimo assoluti, studiamo gli intervalli di monotonia della funzione.
Calcoliamo anzitutto la derivata prima:

$$g'(x) = ae^{2x-x^2} + (ax+b)e^{2x-x^2}(2-2x) = (-2ax^2 + 2(a-b)x + a + 2b)e^{2x-x^2}$$

Il segno della funzione $g'(x)$ dipende unicamente dal segno del polinomio

$$-2ax^2 + 2(a-b)x + a + 2b$$

perché il fattore e^{2x-x^2} è positivo per ogni x reale.
Se $a \neq 0$, il polinomio $-2ax^2 + 2(a-b)x + a + 2b$ è di secondo grado, per cui individua graficamente una parabola.
L'equazione $-2ax^2 + 2(a-b)x + a + 2b = 0$ ha discriminante:

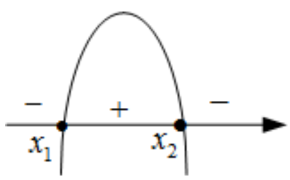
$$\big(2(a-b)\big)^2 - 4 \cdot (-2a) \cdot (a+2b) = 12a^2 + 8ab + 4b^2 = 4(3a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$= 4[2a^2 + (a+b)^2]$$

e poiché stiamo supponendo $a \neq 0$, tale discriminante è certamente positivo.
Ne segue che la parabola di equazione

$$y = -2ax^2 + 2(a-b)x + a + 2b \qquad [*]$$

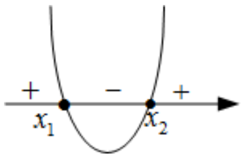
interseca l'asse delle ascisse in due punti distinti per ogni valore di a e b, con $a \neq 0$.
Indichiamo con x_1 e x_2 le ascisse di tali punti.

Se $a > 0$, la parabola [*] ha concavità rivolta verso il basso, quindi lo schema del segno di $g'(x)$ è il seguente:



Ne segue che la funzione $g(x)$:
- nell'intervallo $(-\infty, x_1]$ è strettamente decrescente con $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$;
- nell'intervallo $[x_1, x_2]$ è strettamente crescente;
- nell'intervallo $[x_2, +\infty)$ è strettamente decrescente con $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Di conseguenza la funzione *g*(*x*) ammette minimo assoluto per $x = x_1$ e massimo assoluto per $x = x_2$.
Se $a < 0$, la parabola [*] ha concavità rivolta verso il basso, quindi lo schema del segno di *g*'(*x*) è il seguente:



Ne segue che la funzione *g*(*x*):
• nell'intervallo $(-\infty, x_1]$ è strettamente crescente con $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$;
• nell'intervallo $[x_1, x_2]$ è strettamente decrescente;
• nell'intervallo $[x_2, +\infty)$ è strettamente crescente con $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
Di conseguenza la funzione *g*(*x*) ammette massimo assoluto per $x = x_1$ e minimo assoluto per $x = x_2$.
Affinché i due grafici si intersechino nel punto $A(2, 1)$, deve essere contemporaneamente vero che $f(2) = 1$ e che $g(2) = 1$.
Risolviamo dunque il sistema:

$$\begin{cases} a \cdot 2^2 - 2 + b = 1 \\ (a \cdot 2 + b)e^{2\cdot 2 - 2^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 4a + b = 3 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \to \begin{cases} b = 3 - 4a \\ 2a + 3 - 4a = 1 \end{cases} \to$$
$$\to \begin{cases} b = 3 - 4a \\ -2a = -2 \end{cases} \to \begin{cases} b = 3 - 4 \\ a = 1 \end{cases} \to \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

da cui otteniamo che i grafici delle due funzioni si intersecano in $A(2, 1)$ per $a = 1$ e $b = -1$.

Osservazione
In alternativa al procedimento sopra esposto, l'esistenza di minimo assoluto e massimo assoluto per la funzione assegnata può essere ricavata senza fare calcoli sulla derivata prima, facendo appello alla seguente proprietà più generale.

Se *una funzione* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *soddisfa le seguenti proprietà:*
• *è continua*
• *ammette l'asse* x *come asintoto orizzontale bilatero*
• *in almeno un punto assume valore positivo e in almeno un punto assume valore negativo*
allora la funzione f *ammette minimo assoluto e massimo assoluto.*

Dimostrazione.
Sia x_1 un punto in cui $f(x_1) > 0$. Dall'ipotesi che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ segue (in base alla definizione di limite) che esiste $N > 0$ tale che $|f(x)| < f(x_1)$ per ogni x per cui $|x| > N$. Abbiamo allora che:
• nell'intervallo $[-N, N]$ la funzione f è continua, dunque ammette certamente massimo assoluto M per il teorema di Weierstrass; dovrà essere $f(x_1) \le M$, perché necessariamente $x_1 \in [-N, N]$
• negli intervalli $(-\infty, -N)$ e $(N, +\infty)$, la funzione f è continua e risulta $|f(x)| < f(x_1)$, quindi in particolare si ha $f(x) < f(x_1) \le M$.
In definitiva risulta $f(x) \le M$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la funzione f assume valore M in $[-N, N]$, dunque la funzione f ammette massimo assoluto, uguale a M, in $\mathbf{R}$.

Considerando un punto x_2 in cui $f(x_2) < 0$, con un ragionamento analogo, si mostra che la funzione f ammette anche minimo assoluto in $\mathbf{R}$.

È immediato constatare che la funzione $g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2}$, con $a \neq 0$, soddisfa tutte le ipotesi previste dalla proprietà enunciata:
• è continua in $\mathbf{R}$
• risulta $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax + b)e^{2x-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{e^{x^2-2x}} = 0$
• assume valori positivi per $x > -\frac{b}{a}$ e valori negativi per $x < -\frac{b}{a}$.
Ciò permette di concludere che $g(x)$ ammette certamente minimo assoluto e massimo assoluto.

Punto 2
Assumendo $a = 1$ e $b = -1$, studiamo le funzioni

$$f(x) = x^2 - x - 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$$

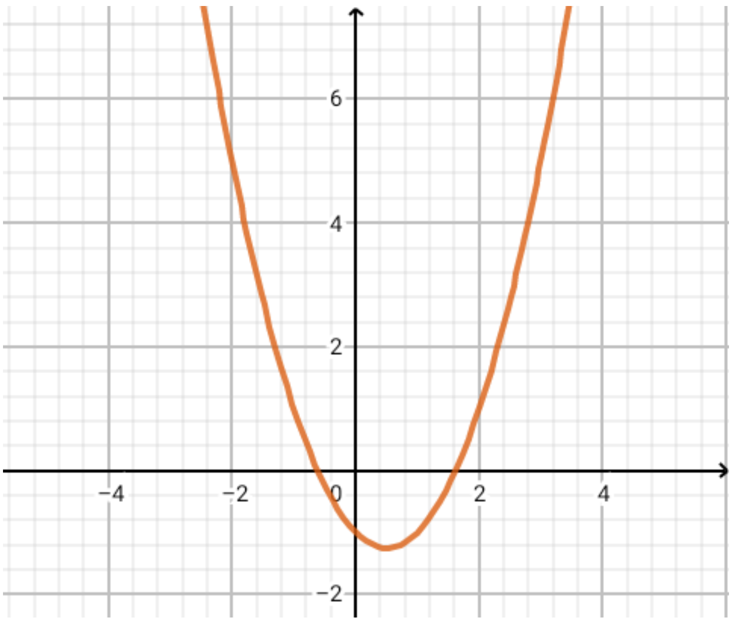
Poiché i valori dei parametri a e b sono uguali a quelli determinati al punto precedente, i grafici delle due funzioni si intersecano nel punto A.

Il grafico della funzione $f(x)$ è una parabola con concavità rivolta verso l'alto, che interseca l'asse delle x nei punti di ascissa

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

cioè nei punti $C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ e $D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.
Vi è un punto di minimo in corrispondenza del vertice della parabola, per $x = \frac{1}{2}$. Il minimo è:
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$.

Il grafico di $f(x)$ è quindi il seguente:



Consideriamo la funzione $g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$: come già discusso in precedenza, questa funzione è continua e derivabile nell'insieme dei numeri reali e ammette limiti

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{2x-x^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{2x-x^2} = 0.$$

Quindi la funzione ha un asintoto orizzontale (bilatero) di equazione $y = 0$.
Per studiare il segno di $g(x)$ risolviamo la disequazione

$$(x-1)e^{2x-x^2} \geq 0$$

Poiché il secondo fattore è positivo per ogni valore di x, essa equivale alla disequazione

$$x - 1 \geq 0$$

Risolvendo abbiamo

$$x \geq 1$$

per cui la funzione è positiva per $x \geq 1$.
Per studiare gli intervalli di monotonia possiamo considerare la funzione $g'(x)$ calcolata al punto precedente, sostituendo al posto dei parametri a e b i valori 1 e -1 rispettivamente. Otteniamo:

$$g'(x) = (-2x^2 + 4x - 1)e^{2x-x^2}$$

Risolviamo dunque la disequazione

$$(-2x^2 + 4x - 1)e^{2x-x^2} \geq 0$$

Essa, per quanto detto in precedenza, equivale a

$$-2x^2 + 4x - 1 \geq 0$$

Risolvendo l'equazione associata

$$-2x^2 + 4x - 1 = 0$$

otteniamo le soluzioni

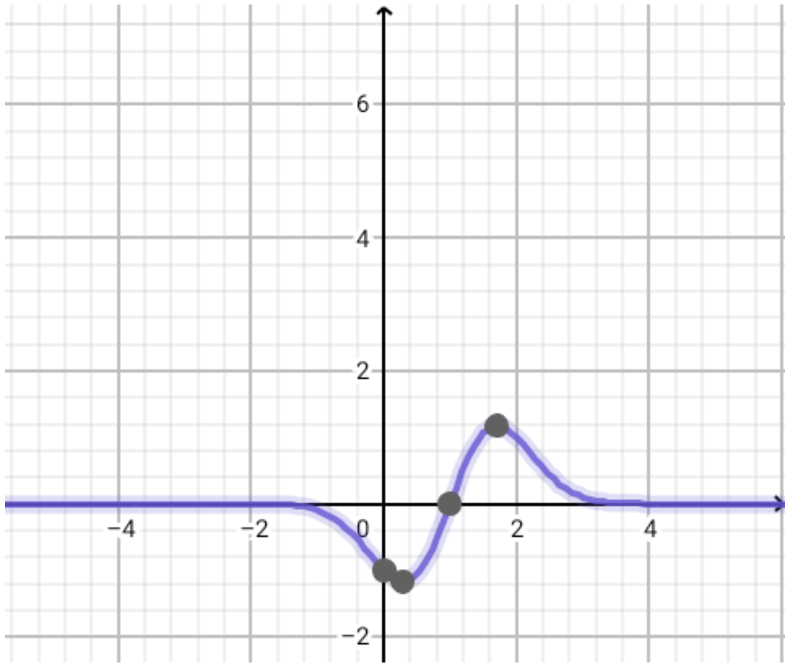
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot(-2)\cdot(-1)}}{-4} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{-4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Dal momento che la parabola di equazione $y = -2x^2 + 4x - 1$ ha la concavità rivolta verso il basso, la disequazione $-2x^2 + 4x - 1 \geq 0$ è verificata per $\frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Quindi f è monotona crescente in tale intervallo, mentre è monotona descrescente per $x < \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ e per $x > \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.
Da questo segue che $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ è il punto di minimo assoluto, mentre $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ è il punto di massimo assoluto.

Il minimo e il massimo di g sono rispettivamente

$$g\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \simeq -1{,}166 \qquad \text{e} \qquad g\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 1{,}166$$

Il grafico di $g(x)$ è dunque il seguente:



Traslando il grafico verso sinistra di una unità, cioè sostituendo *x*+1 al posto di *x* nell'espressione analitica della funzione, otteniamo la funzione

$$\tilde{g}(x) = (x+1-1)e^{2(x+1)-(x+1)^2} = xe^{2x+2-x^2-2x-1} = xe^{1-x^2}.$$

La funzione ottenuta è dispari, infatti:

$$\tilde{g}(-x) = -xe^{1-(-x)^2} = -xe^{1-x^2} = -\tilde{g}(x).$$

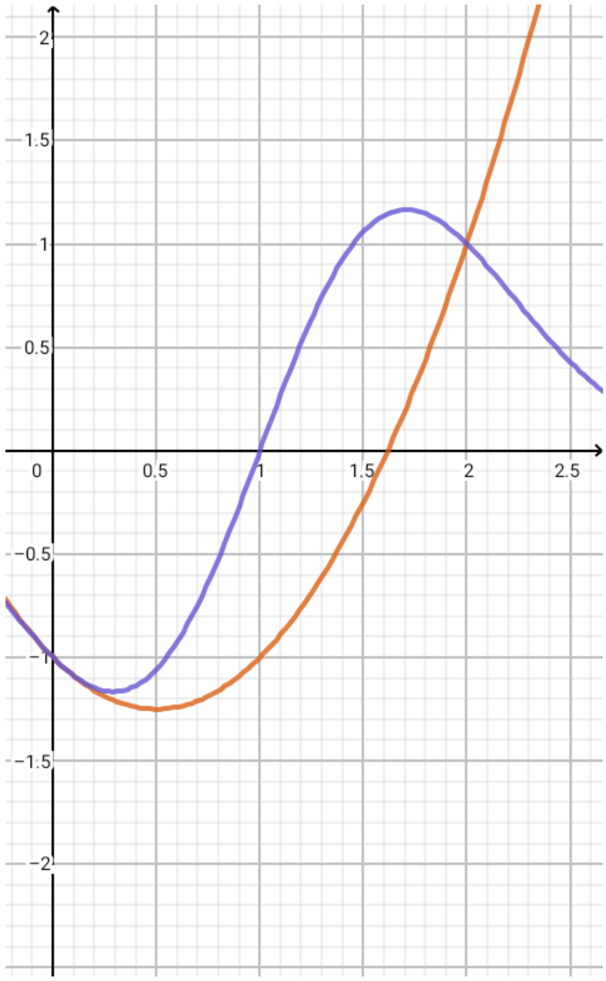
Dunque la funzione $g(x)$ ha un centro di simmetria, che è il punto di intersezione con l'asse delle ascisse $(1, 0)$.
Per provare che i grafici delle due funzioni *f* e *g* sono tangenti nel punto $B(0, -1)$, proviamo che ammettono in quel punto la stessa retta tangente.
Innanzitutto proviamo che entrambi i grafici passano per il punto B. Abbiamo infatti:

$$f(0) = -1 \qquad \text{e} \qquad g(0) = -1.$$

Affinché i grafici delle due funzioni abbiano la stessa retta tangente in *B*, è sufficiente provare che hanno la stessa derivata per $x = 0$:

$f'(x) = 2x - 1$, da cui $f'(0) = -1$
$g'(x) = (-2x^2 + 4x - 1)e^{2x-x^2}$ da cui $g'(0) = (-1)e^0 = -1$

Calcoliamo infine l'area della regione S delimitata dai grafici delle due funzioni. Essa è rappresentata nella figura seguente:



Tale area può essere calcolata tramite l'integrale definito della differenza $g(x) - f(x)$, nell'intervallo individuato dalle ascisse dei punti di intersezione tra i due grafici, dal momento che in tale intervallo $g(x) \geq f(x)$.
Per quanto visto in precedenza, i punti di intersezione tra i due grafici sono A e B, che hanno ascisse 2 e 0 rispettivamente.
Dunque l'area della regione S è data da:

$$\int_0^2 (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^2 ((x-1)e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1)\, dx.$$

Utilizzando la proprietà di linearità dell'integrale definito, otteniamo:

$$\int_0^2 ((x-1)e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1)\, dx = \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\, dx - \int_0^2 x^2\, dx + \int_0^2 x\, dx + \int_0^2 dx.$$

Calcoliamo separatamente ogni integrale.

- Data la simmetria rispetto al punto di ascissa 1 discussa in precedenza, il primo dei quattro integrali è nullo.
  In alternativa, possiamo comunque eseguire il calcolo diretto, osservando che la funzione integranda è una funzione esponenziale il cui esponente ha derivata $2 - 2x$:

$$\int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 (2-2x)e^{2x-x^2}\,dx$$

Ricordando che

$$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$$

abbiamo

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 (2-2x)e^{2x-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{2x-x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}\,(1-1) = 0.$$

- Calcoliamo gli altri integrali:

$$-\int_0^2 x^2\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{8}{3};$$

$$\int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{2} = 2;$$

$$\int_0^2 dx = [x]_0^2 = 2.$$

L'area di S vale quindi:

$$\int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2}\,dx - \int_0^2 x^2\,dx + \int_0^2 x\,dx + \int_0^2 dx = 0 - \frac{8}{3} + 2 + 2 = \frac{4}{3}.$$

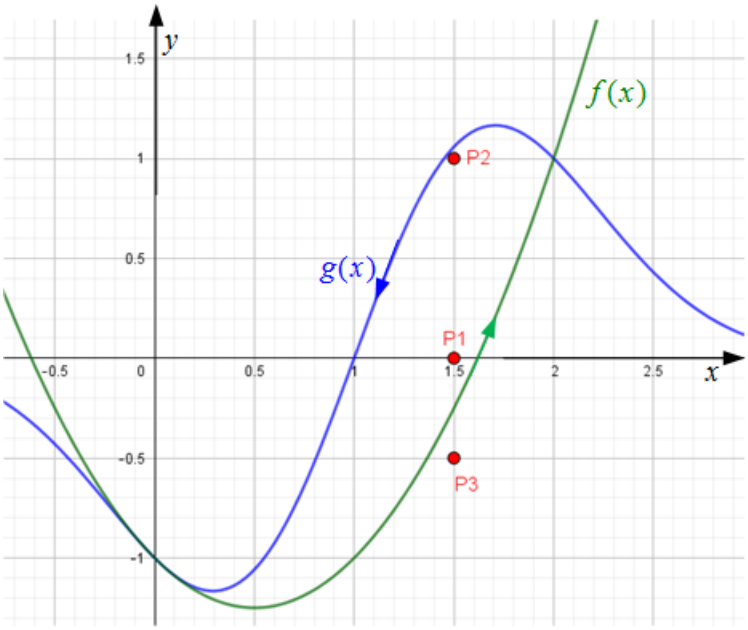
Punto 3

Il modo più rapido per risolvere il problema è utilizzare il teorema di Ampère secondo cui la circuitazione del campo magnetico è direttamente proporzionale alla somma delle correnti *concatenate* al percorso di circuitazione.

Calcoliamo anzitutto $f\left(\frac{3}{2}\right)$ e $g\left(\frac{3}{2}\right)$ per capire quali correnti siano concatenate.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$
$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}} \simeq 1{,}06$$

Da questi risultati deduciamo che le correnti 1 e 2 sono concatenate al percorso mentre la corrente 3 non lo è. La circuitazione è dunque *indipendente* dalla corrente 3. Fissiamo lungo il percorso di circuitazione come positivo il verso antiorario.



Per il teorema teorema di Ampère sarà:

$$\Gamma_B = \mu_0(\pm i_2 - 2{,}0\ \mathrm{A})$$

dove il segno della corrente i_2 dipende dal suo verso. Analizzando i vari possibili casi:

- se i_2 è uscente dal foglio, allora:

$$\Gamma_B = \mu_0(i_2 - 2{,}0\ \mathrm{A})$$

  e Γ_B sarà minore, uguale o maggiore di 0 a seconda che l'intensità i_2 sia minore, uguale a maggiore di $2{,}0\ \mathrm{A}$;

- se i_2 è entrante rispetto al foglio, allora:

$$\Gamma_B = \mu_0(-i_2 - 2{,}0\ \mathrm{A})$$

  e Γ_B sarà minore di 0.

Punto 4

Utilizziamo la legge di Lenz per risolvere il problema, in base a cui:

$$\mathrm{f.e.m.} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

dove Φ_B è il flusso del campo magnetico attraverso la superficie considerata.
Dal momento che il campo è uniforme:

$$\Phi_B = BA\cos\theta$$

dove A è l'area della regione S (calcolata al punto 2) e θ è l'angolo formato dalla normale alla superficie con il campo magnetico. L'angolo θ è inizialmente nullo ed evolve nel tempo come

$$\theta = \omega t$$

Pertanto:

$$\Phi_B = BA\cos(\omega t) \rightarrow -\frac{d\Phi_B}{dt} = BA\,\omega\sin(\omega t)$$

Il valore massimo della f.e.m. è dunque $BA\,\omega$. La prima legge di Ohm ci permette quindi di ricavare il valore cercato di ω:

$$BA\,\omega = Ri_{\max} \rightarrow \omega = \frac{Ri_{\max}}{BA} = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{rad/s}$$