SOLUZIONE QUESITO 7

Indichiamo con Δx e Δt la distanza percorsa dalla particella e il relativo intervallo di tempo nel sistema di riferimento S solidale al laboratorio e con $\Delta x'$ e $\Delta t'$ le medesime quantità misurate nel sistema di riferimento S' solidale alla navicella che si muove rispetto al laboratorio con velocità $V = \beta c = 0{,}80\ c$.

La velocità media della particella misurata in S è data da:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}25\ \mathrm{m}}{2{,}0 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}} = 1{,}3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s} = 0{,}42\ c$$

Il laboratorio si muove rispetto alla navicella con velocità diretta nel verso negativo dell'asse x' pari a $-V$. Usando la legge di trasformazione delle velocità otteniamo la velocità media v' nel sistema S':

$$v' = \frac{v - V}{1 - v\,V/c^2} = \frac{0{,}42\ c - 0{,}80\ c}{1 - 0{,}42\ c \cdot 0{,}80\ c/c^2} = -0{,}57\ c$$

Quindi, rispetto alla navicella, la particella si muove con velocità di modulo 0,57 c nella direzione negativa delle x'.

Per conoscere la distanza percorsa dalla particella e il tempo impiegato possiamo percorrere due strade.

1) Usare le trasformazioni di Lorentz:

$$\Delta x' = \gamma\ \Delta x - \beta\gamma\ c\Delta t$$
$$c\Delta t' = -\beta\gamma\ \Delta x + \gamma\ c\Delta t$$

Nel nostro caso:

$$\beta = 0{,}80$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{0{,}60} = 1{,}7$$
$$c\Delta t = 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s} = 0{,}60\ \mathrm{m}$$

Da cui otteniamo:

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}64}} \cdot 0{,}25\ \mathrm{m} - 0{,}80 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0{,}64}} \cdot 0{,}60\ \mathrm{m}\ = -0{,}38\ \mathrm{m}$$

La distanza percorsa è quindi pari a 38 cm.

$$c\Delta t' = -0{,}80 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0{,}64}} \cdot 0{,}25\ \mathrm{m} + \frac{1}{\sqrt{1-0{,}64}} \cdot 0{,}60\ \mathrm{m} = 0{,}67\ \mathrm{m}$$
$$\Delta t' = \frac{0{,}67\ \mathrm{m}}{3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}} = 2{,}2 \times 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

È anche possibile ottenere prima le quantità $\Delta x'$ e $c\Delta t'$ e da esse dedurre la velocità della particella misurata nel sistema di riferimento della navicella:

$$\frac{v'}{c} = \frac{\Delta x'}{c\Delta t'} = \frac{-0{,}38\ \mathrm{m}}{0{,}67\ \mathrm{m}} = 0{,}57 \Rightarrow v' = -0{,}57\ c$$

Questo risultato coincide naturalmente con quello ottenuto precedentemente.

2) Utilizzare il tempo proprio trascorso tra il passaggio della particella nell'origine e il passaggio della particella nel punto $x = 25\ \mathrm{cm}$.

Il tempo proprio può essere calcolato tramite la relazione:

$$\tau = \Delta t/\gamma_{\mathrm{particella}}$$

dove

$$\gamma_{\text{particella}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}42^2}}$$

o anche, usando l'invarianza dell'intervallo

$$c^2\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$$

In entrambi i casi si ottiene

$$\tau = 1{,}8 \text{ ns}$$

Si può poi ottenere $\Delta t'$ usando ancora la dilatazione dei tempi

$$\Delta t' = \tau\gamma'_{\text{particella}}$$

dove ora

$$\gamma'_{\text{particella}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

ottenendo

$$\Delta t' = 1{,}8 \text{ ns}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}57^2}} = 2{,}2 \text{ ns}$$

Per calcolare la distanza percorsa basta moltiplicare questo risultato per la velocità della particella nel sistema di riferimento della navicella:

$$\Delta x' = v'\Delta t = 0{,}57\ c \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 0{,}38 \text{ m}$$