SOLUZIONE PROBLEMA 2

1. Facciamo riferimento alla **Figura 1**, in cui la carica $Q_1 = 4q$ è posta nell'origine e la carica $Q_2 = q$ è posta nel punto $A(0;1)$.
   Indichiamo con $\overrightarrow{E_1}$ il campo elettrico generato dalla carica Q_1 e con $\overrightarrow{E_2}$ il campo elettrico generato dalla carica Q_2.
   Il campo elettrico in un generico punto P del piano può essere determinato tramite il principio di sovrapposizione: $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$.
   Riguardo alla posizione del punto P cercato, possiamo considerare i due seguenti casi:
   - P non appartiene all'asse y;
   - P appartiene all'asse y.

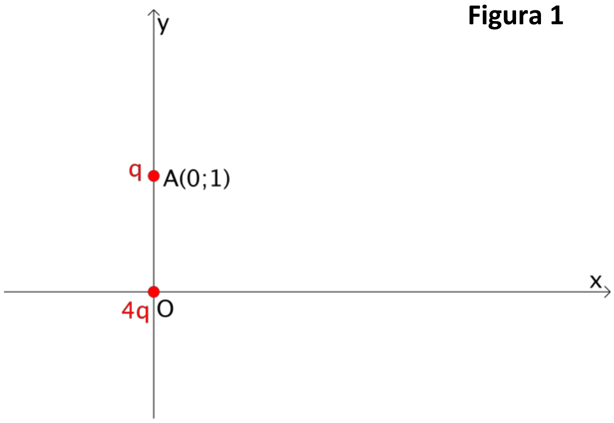


Figura 1

   Se P non appartiene all'asse y, il campo elettrico in P non può essere nullo, in quanto i due vettori $\overrightarrow{E_1}$ e $\overrightarrow{E_2}$ non possono essere opposti, non avendo la stessa direzione (**Figura 2**).
   Se P appartiene all'asse y, c'è un solo caso in cui il campo può essere nullo: quello in cui P è un punto interno al segmento OA.
   Se infatti P stesse al di sotto del punto O ($y_P < 0$), i vettori $\overrightarrow{E_1}$ e $\overrightarrow{E_2}$ sarebbero entrambi rivolti verso il basso e non potrebbero essere opposti. Con ragionamento analogo, possiamo dire che, se P fosse al di sopra di A ($y_P > 1$), i vettori $\overrightarrow{E_1}$ e $\overrightarrow{E_2}$ sarebbero entrambi rivolti verso l'alto e, di nuovo, non potrebbero essere opposti.
   Il punto P non può coincidere né con O, né con A, dove il modulo del campo elettrico tende a infinito, per cui deve per forza essere un punto dell'asse y, di ordinata tale che $0 < y_P < 1$.

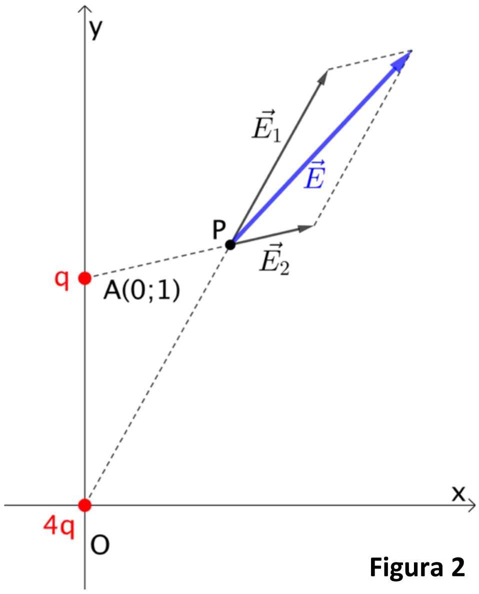


Figura 2

   Determiniamo dunque la posizione del punto P con queste limitazioni (**Figura 3**).
   Si ha:
   $\overline{OP} = y_P \qquad \overline{AP} = 1 - y_P$
   Calcoliamo l'intensità dei due campi elettrici:
   $E_1 = k\frac{4q}{{y_P}^2} \qquad E_2 = k\frac{q}{(1-y_P)^2}$
   La costante k è data da: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$, essendo ε la costante dielettrica assoluta del mezzo in cui sono immerse le due cariche.

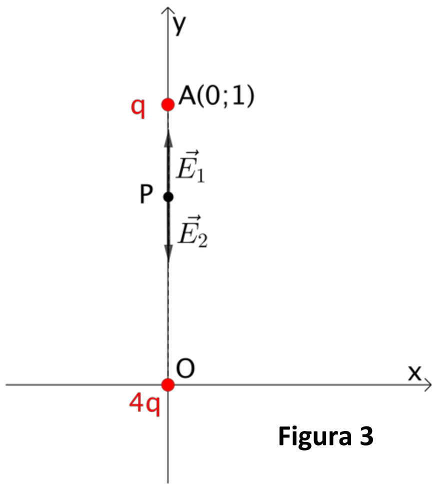


Figura 3

   Scriviamo i due vettori in componenti:
   $\overrightarrow{E_1}\left(0; k\frac{4q}{{y_P}^2}\right) \qquad \overrightarrow{E_2}\left(0; -k\frac{q}{(1-y_P)^2}\right)$

Affinché i due vettori siano opposti, si deve verificare:

$\overrightarrow{E_1} = -\overrightarrow{E_2} \Leftrightarrow k\frac{4q}{{y_P}^2} = k\frac{q}{(1-y_P)^2}$

Da quest'ultima relazione si ricava l'equazione:

$$3{y_P}^2 - 8y_P + 4 = 0$$

che, risolta, fornisce le soluzioni: $y_P = \frac{2}{3}$ e $y_P = 2$.

La seconda soluzione non è accettabile, in quanto non soddisfa la condizione $0 < y_P < 1$.

Dunque il punto P è unico e ha coordinate: $P\left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Una terza carica Q_3, posizionata in P, si trova in equilibrio instabile: per capirlo consideriamo un paio di esempi.

Una carica positiva che subisca un lieve spostamento al di fuori dell'asse y, viene ulteriormente allontanata da esso, a causa della forza elettrica, che è diretta come il campo elettrico (v. **Figura 2**).

Una carica negativa spostata lungo l'asse y un po' più in alto o un po' più in basso rispetto a P risente maggiormente dell'attrazione di Q_2 o di Q_1, rispettivamente, per cui tende ad allontanarsi dal punto P.

2. Facciamo riferimento alla **Figura 4**, in cui la carica Q_2 si trova in un punto $B(x; 1)$.
   Si tratta di calcolare l'energia potenziale di un sistema formato da due cariche puntiformi.
   $U(x) = k\frac{Q_1 Q_2}{\overline{OB}} = k\frac{4q \cdot q}{\sqrt{\overline{OB'}^2 + \overline{BB'}^2}} = k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$
   Va osservato che questa è l'energia potenziale del sistema nel caso in cui essa venga considerata nulla quando le cariche sono poste a distanza infinita una dall'altra.

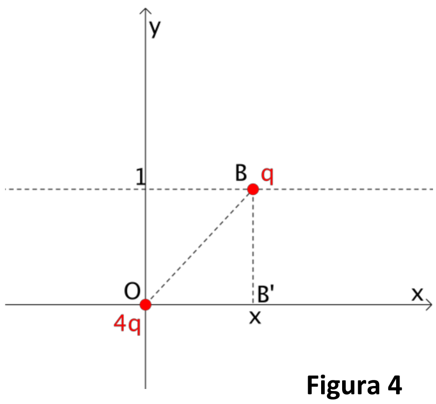


Figura 4

3. Studiamo la funzione $y = U(x)$ ottenuta.
   - Dominio: **R**
   - Intersezioni con gli assi cartesiani

     Asse x: $\begin{cases} y = 0 \\ k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \end{cases}$ mai verificato → non ci sono intersezioni con l'asse x

     Asse y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = U(0) = 4kq^2 \end{cases}$ → $C(0; 4kq^2)$
   - Simmetrie

     $U(-x) = k\frac{4q^2}{\sqrt{1+(-x)^2}} = k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}} = U(x)$

     La funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
   - Comportamento agli estremi del dominio

     $\lim_{x \to \pm\infty} U(x) = \lim_{x \to \pm\infty} k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}} = 0^+$

     L'asse x è asintoto orizzontale della funzione per $x \to \pm\infty$.

- Derivata prima, massimi e minimi

  $U'(x) = -\frac{4kq^2x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = -4kq^2x\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

  La funzione è derivabile su tutto il dominio.

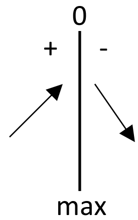
  Punti stazionari: $U'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ è un punto a tangente orizzontale.

  Studiamo il segno della derivata prima:

  $U'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{4kq^2x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0 \Leftrightarrow x < 0$

  Abbiamo tenuto conto del fatto che le costanti k e q sono positive, che il denominatore è positivo per ogni valore di x reale e che la frazione è preceduta dal segno "$-$".

  Il seguente schema riassume il segno di $U'(x)$:



  Il punto stazionario è dunque un punto di massimo.

- Derivata seconda, flessi

  $U''(x) = 4kq^2\frac{2x^2-1}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}} = 4kq^2(2x^2-1)(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$

  Studiamo il segno della derivata seconda, analizzando anche i punti in cui si annulla.

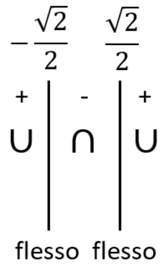
  $U''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4kq^2\frac{2x^2-1}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}} \geq 0$

  Osserviamo che, anche in questo caso, l'unico fattore che cambia segno al variare di x è il fattore $2x^2 - 1$.

  Si ha quindi: $U''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

  In particolare, abbiamo che $U''(x)$ si annulla per $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

  Il seguente schema riassume lo studio della derivata seconda:



  Il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto per $x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e verso il basso per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Presenta inoltre due punti di flesso per $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$:

  $$F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4}{3}\sqrt{6}kq^2\right) \qquad F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4}{3}\sqrt{6}kq^2\right)$$

  I coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso sono:

  $m_1 = U'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8}{9}\sqrt{3}kq^2$

  $m_1 = U'^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{8}{9}\sqrt{3}kq^2$

Il grafico della funzione è riportato in **Figura 5**. Da esso si nota che $x = 0$ è un punto di massimo assoluto.

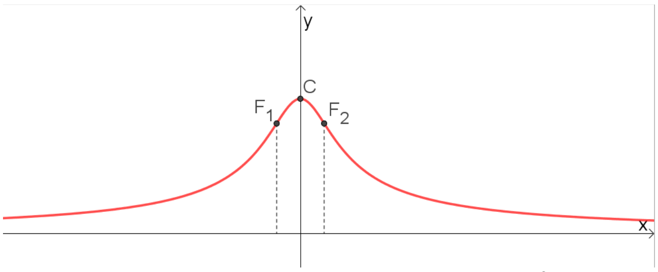


Figura 5

4. In **Figura 6** sono riportati i grafici delle funzioni $U(x)$ e $U'(x)$: quest'ultima è positiva in corrispondenza dell'intervallo in cui $U(x)$ cresce e negativa in corrispondenza dell'intervallo in cui $U(x)$ decresce, si annulla in corrispondenza del punto di massimo di $U(x)$ e presenta due punti stazionari in corrispondenza dei punti di flesso di $U(x)$. È inoltre una funzione dispari, essendo la derivata di una funzione pari: il suo grafico è quindi simmetrico rispetto all'origine.
   Inoltre la funzione $U'(x)$, come la funzione $U(x)$, presenta come asintoto orizzontale l'asse x, come si può ricavare calcolando i limiti per $x \to \pm\infty$ di $U'(x)$. In alternativa, il fatto che $U'(x)$ possiede come asintoto orizzontale l'asse x si poteva dedurre ricordando che, se una funzione $U(x)$ ha asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$ ed esiste il limite per $x \to \pm\infty$ di $U'(x)$, quest'ultimo deve essere nullo.

   L'integrale richiesto è uguale a 0, essendo l'integrale di una funzione dispari calcolato su un intervallo simmetrico rispetto a 0.

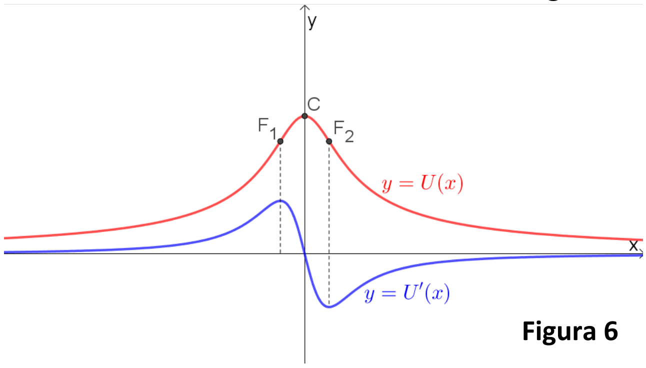


Figura 6