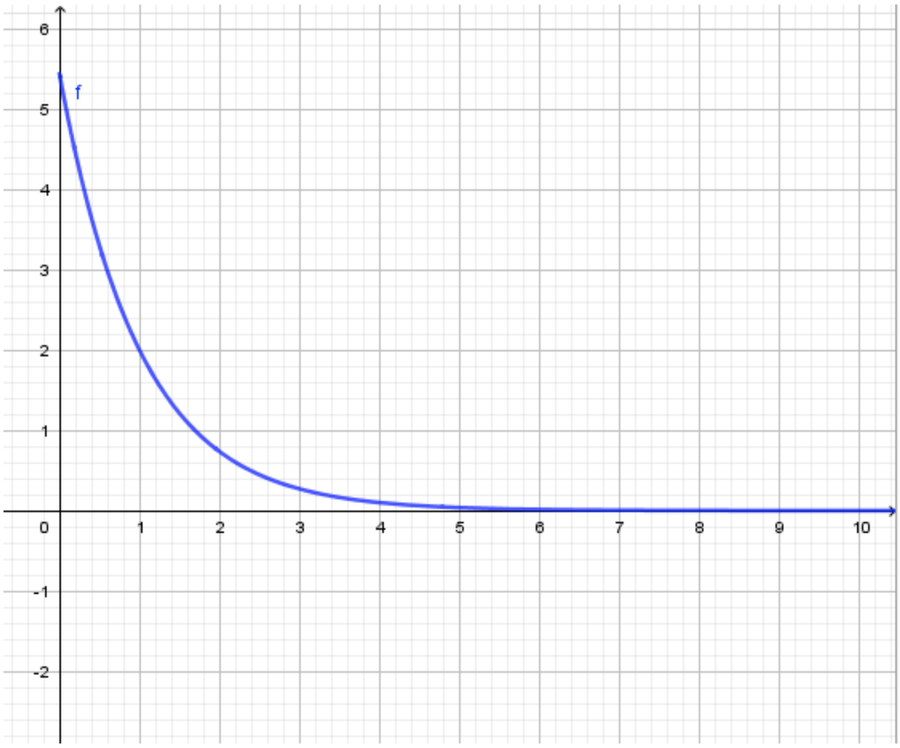
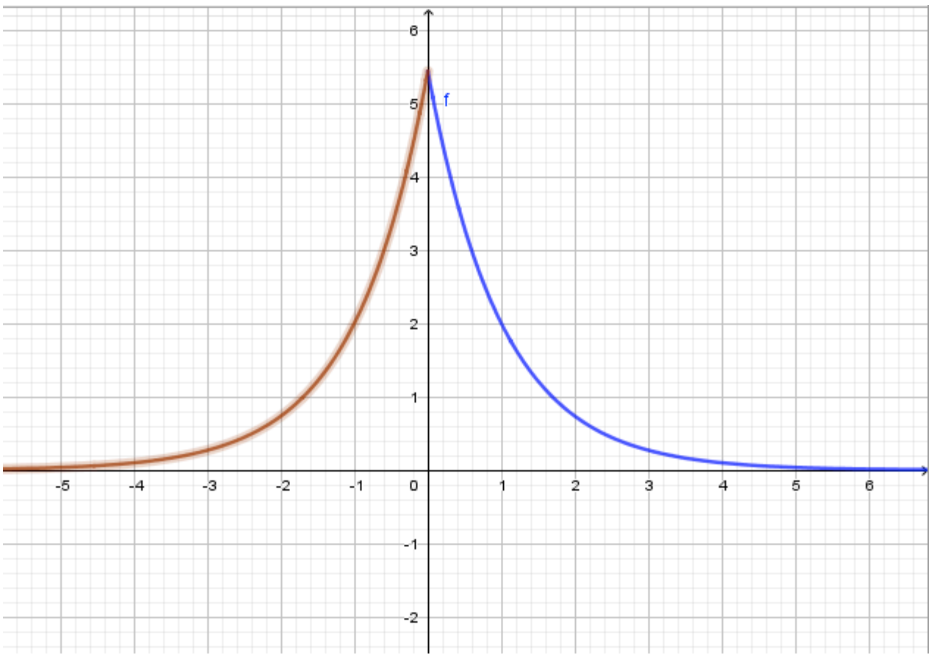
QUESITO 2

Studiamo la funzione $y = 2e^{1-|x|}$:

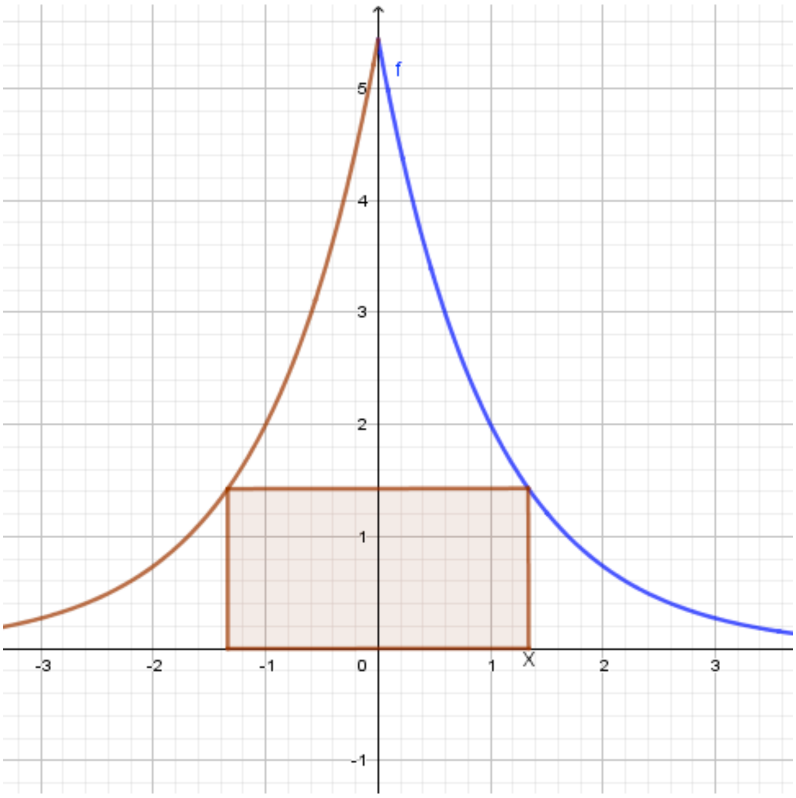
- il dominio è tutto **R**;
- $f(-x) = 2e^{1-|-x|} = f(x)$: la funzione è pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
- Per $x \geq 0$ l'equazione diventa $y = 2e^{1-x} = 2e \cdot e^{-x}$, il cui grafico è:



- Per simmetria si ottiene il grafico di $y = 2e^{1-|x|}$:



Un generico rettangolo inscritto nell'area racchiusa dal grafico della funzione e dall'asse x ha vertici di coordinate: $(\pm x;0)$ e $\left(\pm x;2e^{1-|x|}\right)$.



Supposto $x>0$, le funzioni che esprimono l'area e il perimetro del rettangolo sono:

$$A(x)=2x\cdot 2e^{1-x}=4xe^{1-x} \quad \text{e} \quad p(x)=4x+4e^{1-x}$$

Calcoliamo le funzioni derivate:

$$A'(x)=4e^{1-x}-4xe^{1-x}=4e^{1-x}(1-x)$$

e

$$p'(x)=4-4e^{1-x}=4\left(1-e^{1-x}\right)$$

La funzione $A'(x)$ è positiva per $0<x<1$ e negativa per $x>1$, pertanto $x=1$ è un punto di massimo relativo; è sufficiente tracciare un grafico probabile della funzione $A(x)$, osservando che $\lim_{x\to 0^+} A(x)=0^+$ e $\lim_{x\to +\infty} A(x)=0^+$, per concludere che il punto di massimo relativo è anche di massimo assoluto.
La funzione $p'(x)$ è positiva se:

$$1-e^{1-x}>0$$
$$e^{1-x}<1$$
$$1-x<0$$
$$x>1$$

e negativa per $x<1$. Pertanto $x=1$ è un punto di minimo relativo; anche in questo caso è sufficiente tracciare un grafico probabile della funzione $p(x)$, osservando che $\lim_{x\to0^+} p(x)=4e$ e $\lim_{x\to+\infty} p(x)=+\infty$, per concludere che il punto di minimo relativo è anche di minimo assoluto.
Quindi per $x=1$ l'area è massima e il perimetro è minimo.
La base del rettangolo per $x=1$ misura $2\cdot1=2$ e l'altezza misura $2e^{1-1}=2$, quindi il rettangolo di area massima e perimetro minimo è un quadrato.