SOLUZIONE QUESITO 2

Consideriamo inizialmente una funzione f pari e derivabile su $\mathbf{R}$: per tale funzione abbiamo che $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$.
Essendo f una funzione derivabile ovunque, anche $f(-x)$ è una funzione derivabile su $\mathbf{R}$, perché composizione di funzioni derivabili.
Derivando entrambi i membri dell'equazione otteniamo $D[f(-x)] = Df(x)$. Poiché

$$D[f(-x)] = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x),$$

segue che $-f'(-x) = f'(x)$, ossia che $f'(x)$ è una funzione dispari.
Analogamente, se consideriamo una funzione g dispari e derivabile su $\mathbf{R}$, sappiamo che $\forall x \in \mathbf{R}$ $g(-x) = -g(x)$. Essendo g derivabile ovunque, anche $g(-x)$ è derivabile su $\mathbf{R}$, perché composizione di funzioni derivabili.
Derivando entrambi i membri dell'equazione si ottiene $D[g(-x)] = -g'(x)$. Poiché

$$D[g(-x)] = g'(-x) \cdot (-1) = -g'(-x),$$

segue che $g'(-x) = g'(x)$, ossia che $g'(x)$ è una funzione pari.

Un esempio per la funzione f è dato da $f(x) = \cos x$: è infatti noto che tale funzione è pari e derivabile su $\mathbf{R}$ e che la sua derivata è $f'(x) = -\sin x$, che è una funzione dispari.
Come esempio per la funzione g possiamo riferirci a $g(x) = \sin x$ che è una funzione dispari e derivabile su $\mathbf{R}$, la cui derivata è $g'(x) = \cos x$, che è una funzione pari.

Dimostrazione alternativa
Consideriamo inizialmente una funzione f pari e derivabile su $\mathbf{R}$: per tale funzione abbiamo che $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$.
La derivata di f calcolata nel punto $-x$ è, per definizione, il limite del seguente rapporto incrementale:

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$$

Siccome f è pari possiamo cambiare il segno del suo argomento senza cambiare il segno della funzione:

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$$

Possiamo allora calcolare il limite attraverso la trasformazione di variabile $k = -h$ ottenendo:

$$f'(-x) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{-k} = -\lim_{k \to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} = -f'(x)$$

L'ultimo passaggio è giustificato dalla definizione stessa di derivata di f calcolata nel punto x.
Abbiamo così ottenuto che $f'(-x) = -f'(x)$ cioè che la funzione derivata è dispari.

Analogamente, se consideriamo una funzione g dispari e derivabile su $\mathbf{R}$, sappiamo che $\forall x \in \mathbf{R}$ $g(-x) = -g(x)$.
La derivata di g calcolata nel punto $-x$ è, per definizione, il limite del seguente rapporto incrementale:

$$g'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(-x+h) - g(-x)}{h}$$

Siccome g è dispari possiamo cambiare il segno del suo argomento cambiando il segno della funzione:

$$g'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{-g(x-h) + g(x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{g(x-h) - g(x)}{h}$$

Possiamo allora calcolare il limite attraverso la trasformazione di variabile $k = -h$ ottenendo:

$$g'(-x) = -\lim_{k\to 0} \frac{g(x+k) - g(x)}{-k} = \lim_{k\to 0} \frac{g(x+k) - g(x)}{k} = g'(x)$$

L'ultimo passaggio è giustificato dalla definizione stessa di derivata di g calcolata nel punto x. Abbiamo così ottenuto che $g'(-x) = g'(x)$ cioè che la funzione derivata è pari.