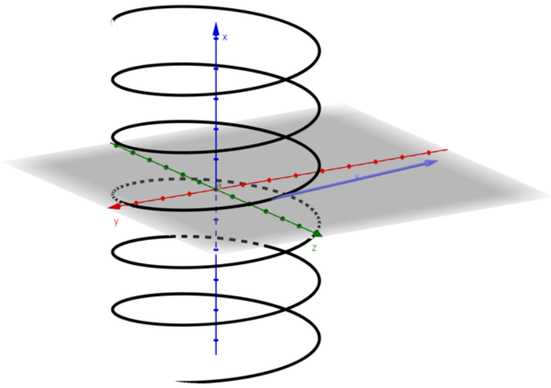
SOLUZIONE QUESITO 8

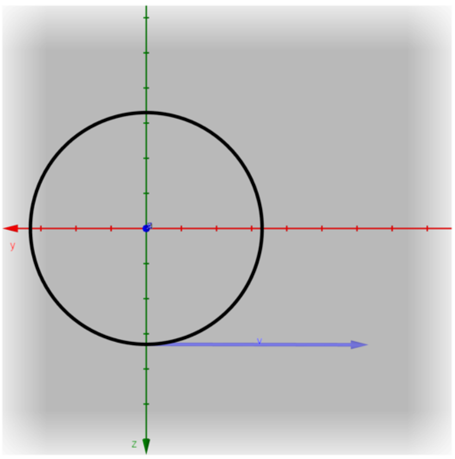
Stabiliamo un sistema di assi cartesiani (x, y, z) in cui l'asse x è parallelo al campo $\vec{B}$.



Chiamiamo v_x il modulo della componente x della velocità, cioè quella parallela al campo $\vec{B}$, e $v_\perp$ il modulo della proiezione della velocità sul piano (y, z), cioè il modulo della componente perpendicolare al campo $\vec{B}$.

La traiettoria è data dalla composizione di un moto circolare uniforme nel piano (y, z) e di un moto rettilineo uniforme nella direzione x.

La proiezione della traiettoria del protone sul piano (y, z) è quindi una circonferenza che viene percorsa con velocità angolare uniforme. Il passo dell'elica è dato dalla distanza percorsa dal protone, nella direzione x, durante un periodo del moto circolare che avviene parallelamente al piano (y, z).



Il raggio dell'elica r è il raggio della traiettoria circolare ed è collegato alla velocità $v_\perp$ dalla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = e\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Poiché $\vec{B}$ è diretto lungo l'asse x, la forza di Lorentz è parallela al piano (y, z). Essa è inoltre sempre perpendicolare alla velocità ed è quindi la causa dell'accelerazione centripeta $\vec{a}_c$ del protone.

Detto θ l'angolo tra la velocità $\vec{v}$ e il campo $\vec{B}$, il modulo della forza $\vec{F}$ è dato da:

$$F = evB \sin\theta = ev_\perp B$$

dove abbiamo usato la relazione $v_\perp = v\sin\theta$.

Dalla Seconda Legge della Dinamica otteniamo:

$$\vec{F} = m\vec{a}_c \Rightarrow ev_\perp B = m\frac{v_\perp^2}{r} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_\perp = \frac{eBr}{m} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T} \cdot 0{,}105\ \mathrm{m}}{1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 1{,}01 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s}$$

Il periodo della rotazione è dato da

$$T = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi\, m}{eB} = \frac{2\pi \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}} = 6{,}56 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}$$

La componente v_x è collegata al passo dell'elica Δx dalla relazione:

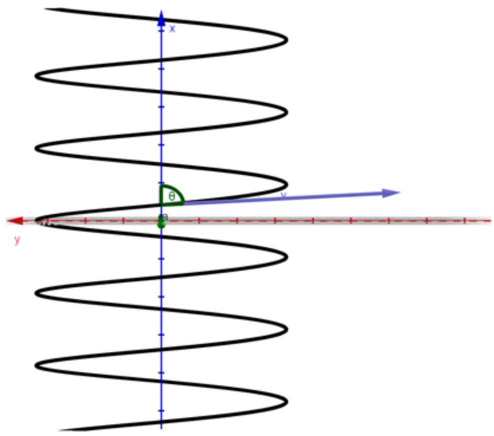
$$v_x = \frac{\Delta x}{T} = \frac{\Delta x\, eB}{2\pi m} = \frac{0{,}381\ \mathrm{m}\cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}}{2\pi\ 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 5{,}81 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$$

Il modulo della velocità si ottiene usando il Teorema di Pitagora

$$v = \sqrt{v_\perp^2 + v_x^2} = 1{,}17 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s}$$

L'angolo tra il campo $\vec{B}$ e la velocità $\vec{v}$ si ottiene usando, ad esempio, la relazione:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_\perp}{v_x}$$



Poiché nel tempo T il protone percorre una distanza $2\pi r$ nel piano (y, z) e una distanza Δx lungo l'asse x, il rapporto $v_\perp/v_x$ è anche uguale a $2\pi r/\Delta x$, come si può verificare sostituendo direttamente le espressioni che abbiamo ricavato per v_x e $v_\perp$. Abbiamo quindi:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_\perp}{v_x} = \tan^{-1}\frac{2\pi r}{\Delta x} = \tan^{-1}\frac{2\pi\ 10{,}5\ \mathrm{cm}}{38{,}1\ \mathrm{cm}} = 60{,}0°$$

Resta tuttavia un'ambiguità perché non possiamo sapere se l'elica viene percorsa in direzione parallela o antiparallela al campo magnetico. Nel secondo caso l'angolo sarebbe di 120°.