SOLUZIONE QUESITO 6

Nel quesito si dice che la posizione $x(t)$ è misurata in metri e il tempo t in secondi, ma non è chiara quale sia la dimensione dei coefficienti presenti nella legge oraria: non può trattarsi ovviamente di quantità adimensionali.
Scrivendo la legge oraria con coefficienti generici si ha:

$$x(t) = \alpha t^2(\beta t + \gamma)$$

In tal caso i coefficienti α, β e γ possono avere svariate interpretazioni.
Per esempio, considerando γ una quantità adimensionale, β si esprimerebbe in s^{-1} e α in ms^{-2}.
Se però si considerasse γ come una lunghezza, espressa in m, β si esprimerebbe in ms^{-1} e α in s^{-2}.
Occorre fare una scelta.
Svolgendo il prodotto presente nella legge oraria, si ottiene:

$$x(t) = \frac{1}{27}t^3 + \frac{2}{9}t^2$$

Possiamo quindi riscrivere la legge in modo generico come segue:

$$x(t) = kt^3 + ht^2$$

e assumere che i coefficienti abbiano i seguenti valori:

$$k = \frac{1}{27}\,\mathrm{ms^{-3}} \qquad h = \frac{2}{9}\,\mathrm{ms^{-2}}$$

Non si tratta di un moto uniformemente accelerato, dal momento che la legge oraria ha la forma di un polinomio di terzo grado in t e non di secondo grado.
Deriviamo l'espressione di $x(t)$ rispetto al tempo per trovare la velocità e, in seguito, deriviamo una seconda volta per trovare l'accelerazione:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3kt^2 + 2ht$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6kt + 2h$$

Anche da quest'ultima equazione è evidente che non si tratta di moto uniformemente accelerato, in quanto l'accelerazione non è costante nel tempo.
Calcoliamo la velocità media $\bar{v}$ nei primi 9 secondi del moto:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(9\text{ s}) - x(0\text{ s})}{9\text{ s}} = \frac{\frac{1}{27}\mathrm{ms^{-3}}\cdot(9\text{ s})^3 + \frac{2}{9}\mathrm{ms^{-2}}\cdot(9\text{ s})^2}{9\text{ s}} = 5\ \mathrm{ms^{-1}}$$

Uguagliando la velocità a questo valore si ottiene:

$$3kt^2 + 2ht = \bar{v}$$

Risolvendo l'equazione rispetto a t, troviamo:

$$t = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 + 3k\bar{v}}}{3k}$$

Scartando la soluzione negativa, troviamo l'istante in cui la velocità è uguale alla velocità media:

$$t = \frac{-h+\sqrt{h^2+3k\bar{v}}}{3k} = \frac{-\frac{2}{9}\ \mathrm{ms^{-2}}+\sqrt{\frac{4}{81}\,\mathrm{m^2s^{-4}}+3\cdot\frac{1}{27}\,\mathrm{ms^{-3}}\cdot 5\ \mathrm{ms^{-1}}}}{3\cdot\frac{1}{27}\,\mathrm{ms^{-3}}} = 5\ \mathrm{s}$$