SOLUZIONE QUESITO 5

Per studiare il problema indichiamo con p la probabilità che Emma guadagni 3 punti con un lancio del dado (successo) e con $q = 1 - p$ la probabilità che Emma ne perda uno (insuccesso). Supponendo che il dado sia equo abbiamo

$$p = \frac{1}{6}$$

e

$$q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Poiché ogni successo permette di guadagnare 3 punti e ogni insuccesso ne fa perdere solo 1, Emma può avere punteggio uguale a 0 dopo 4 lanci solo se in quei lanci avrà ottenuto esattamente un successo e tre insuccessi, indipendentemente dall'ordine con cui si verificano i risultati desiderati. Se indichiamo con X_n il punteggio di Emma dopo n lanci, la probabilità che dopo 4 lanci il suo punteggio sia ancora 0 si può calcolare considerando X_n con una distribuzione binomiale di parametri $\frac{1}{6}$ e 4:

$$P(X_4 = 0) = \binom{4}{1} p^1 q^{4-1} = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{4 \cdot 5^3}{6^4} = \frac{125}{324} \approx 38{,}6\%$$

Consideriamo ora l'evento *"il punteggio non scende mai sotto lo 0 in una sequenza di 6 lanci"*. Affinché questo evento si verifichi, Emma deve ottenere un successo nel primo lancio, altrimenti il punteggio diventerebbe temporaneamente negativo. Questo si verifica con probabilità uguale a $\frac{1}{6}$.
Nei lanci successivi si possono verificare le seguenti possibilità:

- tutti successi; in tal caso la probabilità è $p_1 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1}{6^6}$;
- un solo insuccesso e quattro successi; in tal caso la probabilità è $p_2 = \frac{1}{6} \cdot \binom{5}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{6^6}$;
- due insuccessi e tre successi; in tal caso la probabilità è $p_3 = \frac{1}{6} \cdot \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{6^6}$;
- tre insuccessi e due successi; in tal caso la probabilità è $p_4 = \frac{1}{6} \cdot \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1250}{6^6}$;
- quattro insuccessi e un successo; in questo caso però il successo può avvenire solo al secondo, terzo, quarto e quinto lancio, per cui l'ultimo risultato deve essere per forza un insuccesso; la probabilità è data quindi da $p_5 = \frac{1}{6} \cdot \binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{2500}{6^6}$.

Sommando le probabilità precedenti si ottiene la probabilità cercata:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{4026}{6^6} \approx 8{,}6\%$$