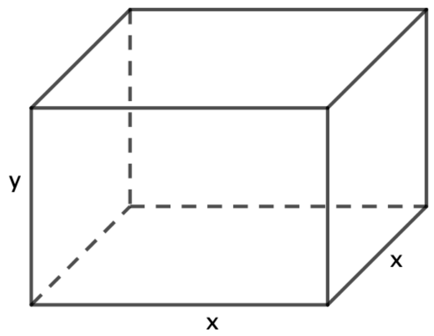
SOLUZIONE QUESITO 3



Siano x la lunghezza degli spigoli della base quadrata del parallelepipedo e y la lunghezza dell'altezza del parallelepipedo; deve essere $x > 0,\ y > 0$.
Poiché

$$S = 2x^2 + 4xy$$

possiamo esprimere la lunghezza dell'altezza in funzione di x:

$$4xy = -2x^2 + S$$

$$y = \frac{-2x^2 + S}{4x}$$

Dalla condizione che $y > 0$ segue che $\frac{-2x^2+S}{4x} > 0$. Essendo $x > 0$ troviamo che $0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}}$.
La somma delle lunghezze di tutti gli spigoli è espressa dalla funzione:

$$f(x) = 8x + 4\left(\frac{-2x^2+S}{4x}\right) = 8x + \frac{-2x^2+S}{x} = \frac{8x^2-2x^2+S}{x} = \frac{6x^2+S}{x}, \text{ con } 0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}} \text{ e } S > 0.$$

Conviene scrivere l'espressione analitica della funzione *f* nella forma:

$$f(x) = 6x + \frac{S}{x}$$

La derivata prima della funzione $f(x)$ è:

$$f'(x) = 6 - \frac{S}{x^2} = \frac{6x^2 - S}{x^2}$$

Tenendo conto che siamo nell'intervallo $0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}}$ risulta:

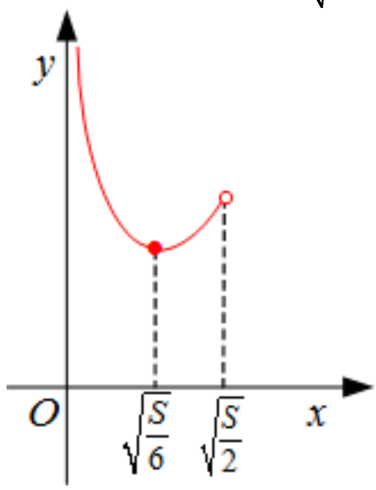
$$f'(x) = 0 \text{ se e solo se } x = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

$$f'(x) > 0 \text{ se e solo se } \sqrt{\frac{S}{6}} < x < \sqrt{\frac{S}{2}}$$

$$f'(x) < 0 \text{ se e solo se } 0 < x < \sqrt{\frac{S}{6}}$$

Dallo studio della derivata prima segue dunque che esiste un punto di minimo relativo per $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$.

Il grafico qualitativo della funzione nell'intervallo $0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}}$ è quello in figura:



Dal grafico possiamo notare che il punto di minimo relativo è anche di minimo assoluto.

Dunque la somma degli spigoli del parallelepipedo è minima per $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$.

Il parallelepipedo cercato risulta avere lo spigolo di base di lunghezza $\sqrt{\frac{S}{6}}$ e altezza di lunghezza

$$y = \frac{-2\left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^2 + S}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{S - \frac{S}{3}}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

Il parallelepipedo cercato è dunque un cubo.