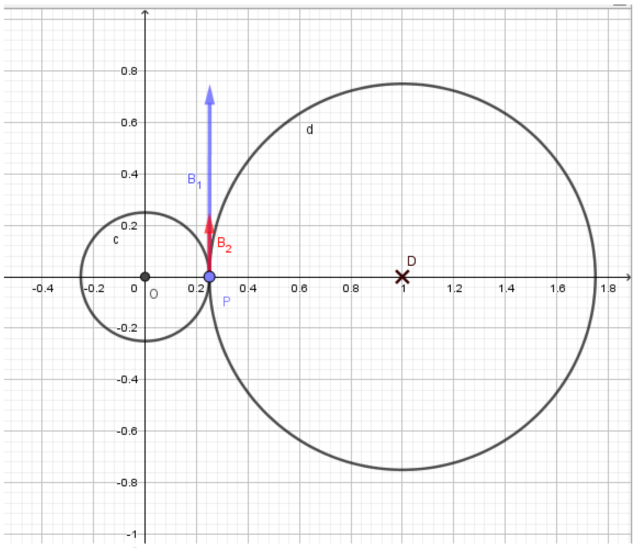
SOLUZIONE PROBLEMA 1



1. Le due correnti rettilinee generano campi magnetici le cui linee di forza sono circonferenze concentriche che giacciono su piani perpendicolari alle correnti stesse. La direzione del vettore campo magnetico è tangente alle linee di forza e il suo verso coincide con il verso delle linee stesse, che è determinato dalla cosiddetta regola della mano destra. In particolare, le linee del campo generato dalla corrente uscente da O, che chiamiamo $\vec{B}_1$, sono orientate in senso antiorario e quelle del campo generato dalla corrente entrante in D, che chiamiamo $\vec{B}_2$, sono orientate in senso orario. Rispetto al sistema di riferimento dato, in un punto P dell'asse x, con 0<x<1, i vettori campo magnetico $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ risultano paralleli all'asse y e orientati nel suo verso positivo. Di conseguenza il vettore campo magnetico $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ ha la loro stessa direzione, il loro stesso verso e intensità uguale alla somma delle intensità. Per la legge di Biot-Savart:
$$B_1(x) = \frac{\mu i}{2\pi x} \text{ e } B_2(x) = \frac{\mu i}{2\pi(1-x)}, \text{ con } 0<x<1,$$
da cui si ottiene che:
$$B(x) = B_1(x) + B_2(x) = \frac{\mu i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = k\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$
con $k = \frac{\mu i}{2\pi}$, costante reale e positiva.

   L'unità di misura di k è tesla·metro $(T \cdot m)$, perché k è il prodotto della costante μ, permeabilità magnetica, che si misura in $\frac{T \cdot m}{A}$, per un'intensità di corrente i, che si misura in A.
Per trovare la posizione del punto P in cui l'intensità del campo magnetico è minima, calcoliamo la derivata della funzione $b(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$:
$$b'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{-1+2x}{x^2(1-x)^2}$$

   e studiamo il suo segno:
$$b'(x) \geq 0 \text{ per } x \geq 1/2$$

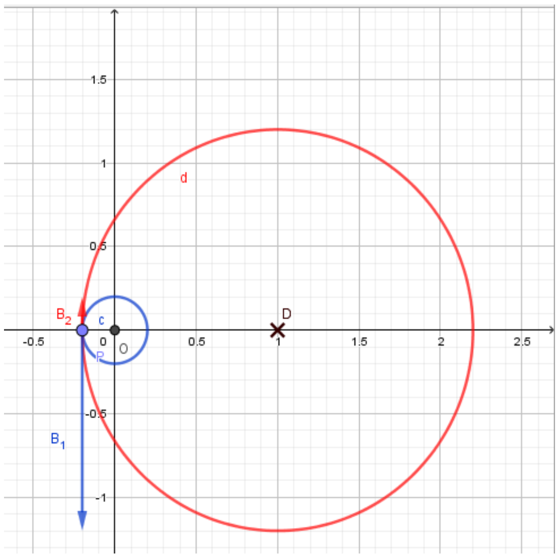
valore di x	$0 < x < 1/2$	$1/2 < x < 1$
segno di $b'(x)$	-	+
andamento di $B(x)$	decrescente	crescente

   L'intensità del campo magnetico totale è minima per x=1/2.
2. La carica q posta in C(1/2,0) ha velocità $\vec{v}_0(0; v_0)$ parallela al campo magnetico, pertanto non risente della forza di Lorentz, $\vec{F}_L = q\vec{v}_0 \times \vec{B} = \vec{0}$ (perché il vettore velocità $\vec{v}_0$ è parallelo al

vettore $\vec{B}$), e prosegue il suo moto rettilineo uniforme sulla retta di equazione x=1/2 con velocità v_0.

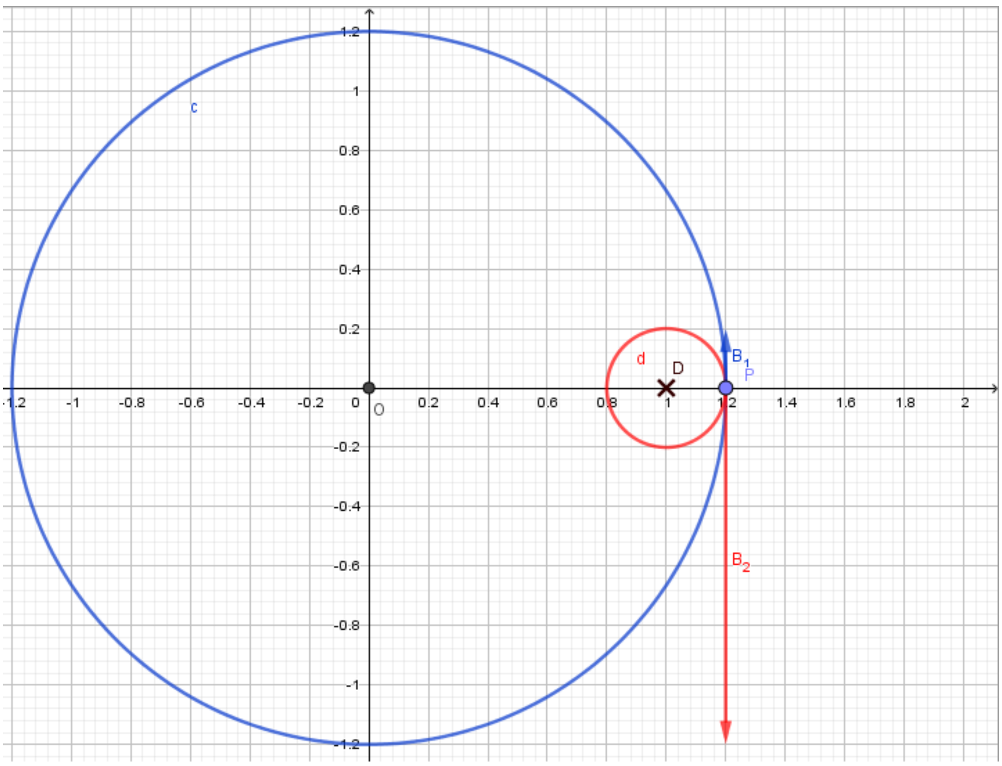
Il vettore campo magnetico $\vec{B}$ in tutti i punti dell'asse x è parallelo all'asse y, perché somma di vettori paralleli all'asse y, ma per x<0 e x>1 il suo verso è opposto a quello dell'asse y, infatti:

- se x<0



l'intensità di $\vec{B}_1$è maggiore dell'intensità di $\vec{B}_2$, perché P è più vicino a O;

- se x>1



l'intensità di $\vec{B}_1$è minore dell'intensità di $\vec{B}_2$, perché P è più vicino a D.

L'intensità del campo magnetico risulta pertanto uguale a:

$$B(x) = k\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) \text{ per } x<0 \text{ v } x>1.$$

Non ci sono punti dell'asse *x* in cui l'intensità del campo magnetico è nulla, perché in nessun caso la funzione $B(x)$ si annulla.

3. Studiamo la funzione $f(x) = k\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = \dfrac{k}{x(1-x)}$
   - Il dominio è $R - \{0; 1\}$
   - Non ci sono simmetrie elementari, perché $f(-x) = k\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}\right) \neq f(\pm x)$, quindi la funzione non è pari, né dispari.
   - La funzione non interseca l'asse y, perché il valore x=0 non appartiene al dominio, e neppure l'asse x, perché il sistema:
   $$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{k}{x(1-x)} \end{cases}$$
   è impossibile.
   - Studiamo il segno della funzione$f(x)$:

valore di x	$x<0$	$0<x<1$	$x>1$
segno di k	+	+	+
segno di x	-	+	+
segno di $1-x$	+	+	-
segno di $f(x)$	-	+	-

   quindi $f(x) > 0$ per $0 < x < 1$.
   - Calcoliamo i limiti:
   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x(1-x)} = 0^-$$
   $$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{k}{x(1-x)} = \pm\infty$$
   $$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{k}{x(1-x)} = \mp\infty$$
   - Ci sono un asintoto orizzontale di equazione y=0 e due asintoti verticali di equazioni x=0 e x=1.
   - La derivata di $f(x)$ è già stata calcolata nel punto 1 del problema:
   $$f'(x) = k\frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$$
   e sappiamo che c'è un minimo per x=1/2. Il minimo è quindi il punto $m(1/2; 4k)$.
   - Calcoliamo la derivata seconda di $f(x)$:
   $$f''(x) = 2k\frac{x^3 + (1-x)^3}{x^3(1-x)^3} = 2k\frac{3x^2 - 3x + 1}{x^3(1-x)^3}$$

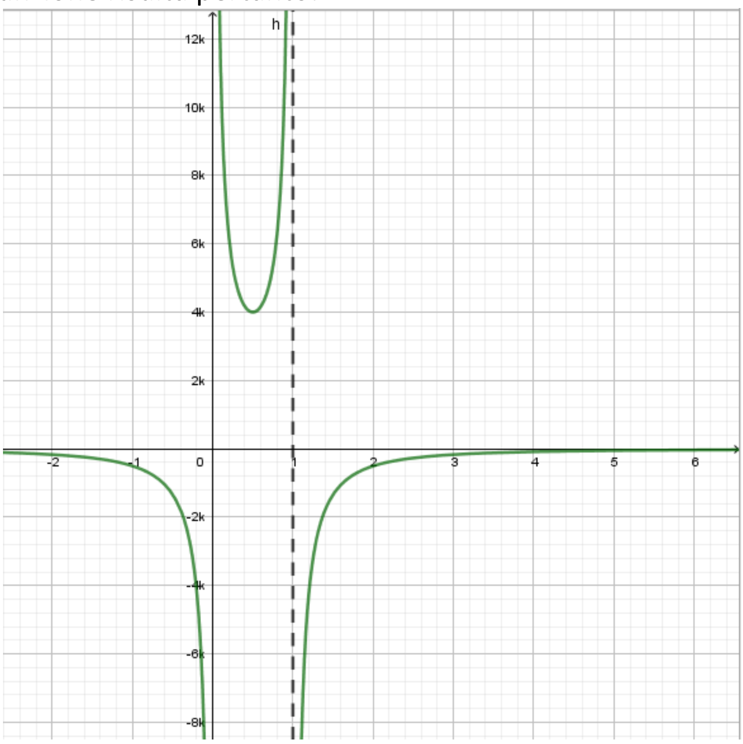
Studiamo il segno della derivata seconda:

valore di x	$x<0$	$0<x<1$	$x>1$
segno di $2k$	+	+	+
segno di $3x^2-3x+1$	+	+	+
segno di x	-	+	+
segno di $1-x$	+	+	-
segno di $f''(x)$	-	+	-

Quindi $f''(x)>0$ per $0<x<1$, mentre $f''(x)<0$ per x<0 e x>1.

Inoltre f''(x) non si annulla mai, perché il polinomio al denominatore è sempre positivo e il denominatore non si annulla mai nel dominio della funzione, dunque non ci sono punti di flesso.

Il grafico della funzione risulta pertanto:

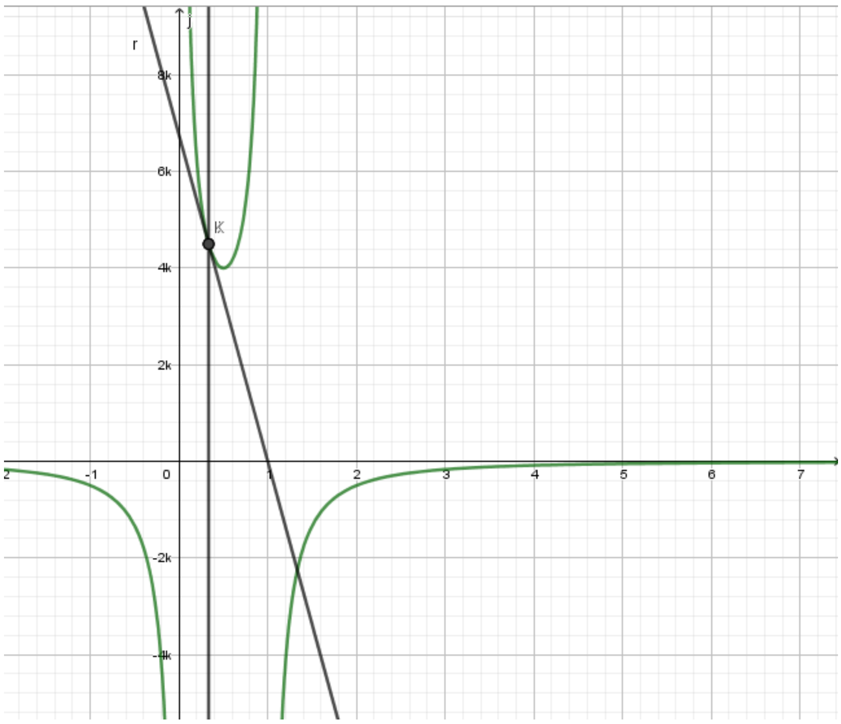


L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa x=1/3 è:

$$r: y-f(1/3)=f'(1/3)(x-1/3)$$

Essendo $f(1/3)=\frac{9k}{2}$ e $f'(x)=-\frac{27k}{4}$ si ottiene $r: y=-\frac{27k}{4}x+\frac{27k}{4}$

Troviamo l'ulteriore punto di intersezione tra la retta tangente r e il grafico di f. Osserviamo innanzitutto dal grafico che il punto cercato appartiene al quarto quadrante e ha ascissa x>1.



Risolvendo il sistema tra l'equazione della retta e l'equazione della funzione, troviamo:

$$\begin{cases} y = -\frac{27k}{4}x + \frac{27k}{4} \\ y = k\frac{1}{x(1-x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{27k}{4}x + \frac{27k}{4} \\ -\frac{27k}{4}x + \frac{27k}{4} = k\frac{1}{x(1-x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{27k}{4}x + \frac{27k}{4} \\ 27x^3 - 54x^2 - 27x - 4 = 0 \end{cases}$$

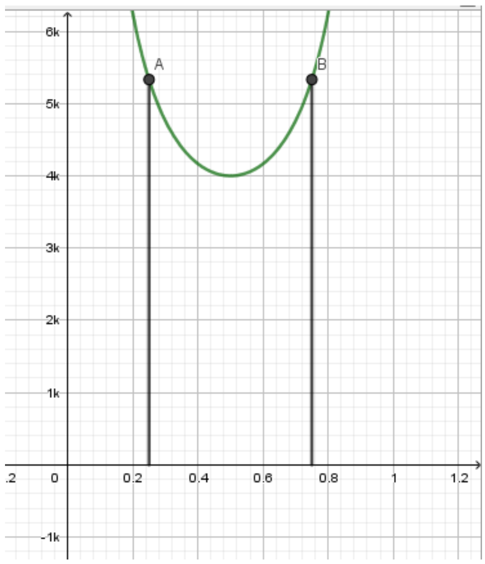
Il polinomio di terzo grado ottenuto ha uno zero in x=1/3 con molteplicità doppia, quindi, fattorizzando con il metodo di Ruffini, otteniamo:

$$\begin{cases} y = -\frac{27k}{4}x + \frac{27k}{4} \\ (3x-1)^2(3x-4) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{9k}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{9k}{4} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

quindi $P\left(\frac{4}{3}; -\frac{9k}{4}\right)$.

4. Calcoliamo l'integrale $\int_{1/4}^{3/4} f(x)dx$:

$$k\int_{1/4}^{3/4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = k\left[\ln x - \ln(1-x)\right]_{1/4}^{3/4} = k\left(\ln\frac{3}{4} - \ln\frac{1}{4}\right) - k\left(\ln\frac{1}{4} - \ln\frac{3}{4}\right) = 2k\ln 3$$



Il risultato esprime l'area del trapezoide individuato dal grafico di f e dalle rette x=1/4 e x=3/4.

Calcoliamo $g(t) = k\int_2^t \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx$.

$$g(t) = k[-\ln x + \ln(x-1)]_2^t = k(-\ln t + \ln(t-1)) - k(-\ln 2 + \ln 1) = k\left(\ln\frac{t-1}{t} + \ln 2\right).$$

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} k\left(\ln\frac{t-1}{t} + \ln 2\right) = \lim_{t\to+\infty} k\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) + \ln 2\right) = k\ln 2$$

Per $t \geq 2$ la funzione integrale $g(t) = \int_2^t |f(x)|dx$ esprime l'area delimitata dall'asse x, dalle rette x=2 e x=t e dal grafico di f, pertanto il limite per $t \to +\infty$ della funzione $g(t)$ esprime tutta l'area delimitata dall'asse x, dalla retta x=2 e dal grafico di f.