SOLUZIONE PROBLEMA 2

La funzione $f(x)$ è definita nel dominio: $\text{dom}\, f = [0; +\infty[$.
La funzione $g(x)$ è definita in tutto l'insieme $\mathbf{R}$.

1. Calcoliamo le derivate di entrambe le funzioni.
   $f'(x) = \frac{k-x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{k-3x}{2\sqrt{x}}$
   $g'(x) = 3x^2 - 2kx = x(3x - 2k)$

   - La funzione $f(x)$ ha un punto di non derivabilità per $x = 0$.
     Calcolando il limite della derivata prima per $x \to 0^+$, si ottiene:
     $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{k-3x}{2\sqrt{x}} = \frac{k}{0^+} = +\infty$
     Si tratta quindi di un punto a tangente verticale, di coordinate $(0; 0)$.
     Studiamo il segno di $f'(x)$.
     $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{k-3x}{2\sqrt{x}} \geq 0$
     Segno del numeratore: $k - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{k}{3}$
     Segno del denominatore: $2\sqrt{x} > 0, \forall x \in]0; +\infty[$.

	0		$\frac{k}{3}$	
segno del numeratore		+	0	-
segno del denominatore		+		+
segno di $f'(x)$		+		-
andamento di $f(x)$		↗	max	↘

     La funzione presenta un solo punto di massimo per $x = \frac{k}{3}$: si tratta del punto $F\left(\frac{k}{3}; \frac{2k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$.

     Siccome k è positivo, si ha sicuramente $\frac{k}{3} < k$, quindi il punto di massimo è compreso nell'intervallo $[0; k]$.

   - Studiamo il segno di $g'(x)$.
     $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(3x - 2k) \geq 0$
     Segno del primo fattore: $x \geq 0$
     Segno del secondo fattore: $3x - 2k \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2k}{3}$.

		0		$\frac{2k}{3}$	
segno del primo fattore	-	0	+		+
segno del secondo fattore	-		-		+
segno di $g'(x)$	+		-		+
andamento di $g(x)$	↗	max	↘	min	↗

     La funzione presenta un punto di massimo per $x = 0$ e un solo punto di minimo per $x = \frac{2k}{3}$.
     Quest'ultimo corrisponde al punto $G\left(\frac{2k}{3}; -\frac{4}{27}k^3\right)$.
     Si ha pure $\frac{2k}{3} < k$, quindi il punto di minimo è compreso nell'intervallo $[0; k]$.

Essendo $x_G = \frac{2k}{3}$ e $x_F = \frac{k}{3}$, è verificato che $x_G = 2x_F$.

Essendo poi $y_G = -\frac{4}{27}k^3$ e ${y_F}^2 = \left(\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}\right)^2 = \frac{4}{27}k^3$, è verificato che $y_G = -(y_F)^2$.

2. I grafici di entrambe le funzioni passano per l'origine, essendo: $f(0) = g(0) = 0$.
Dal momento che $f(x)$ presenta nell'origine un punto a tangente verticale, mentre $g(x)$ presenta un punto stazionario di massimo, è verificato che le rette tangenti ai due grafici sono ortogonali: si tratta, rispettivamente, dell'asse *y* e dell'asse *x*.
Siccome $f(k) = g(k) = 0$, l'ulteriore punto di intersezione tra i due grafici è il punto $A(k; 0)$.
   - Calcoliamo l'equazione della retta t_f, tangente al grafico di $f(x)$ in A.
   $t_f : y = f'(k) \cdot (x - k)$ $\qquad$ $f'(k) = \frac{k-3k}{2\sqrt{k}} = -\sqrt{k}$
   $t_f : y = -\sqrt{k} \cdot x + k\sqrt{k}$
   - Calcoliamo l'equazione della retta t_g, tangente al grafico di $g(x)$ in A.
   $t_g : y = g'(k) \cdot (x - k)$ $\qquad$ $g'(k) = k^2$
   $t_g : y = k^2x - k^3$

Affinché le due rette trovate siano ortogonali, i loro coefficienti angolari devono essere antireciproci: $f'(k) = -\frac{1}{g'(k)} \Leftrightarrow -\sqrt{k} = -\frac{1}{k^2}$.
Risolvendo l'equazione ottenuta, si ha:
$\sqrt{k} = \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{k^4} \Leftrightarrow k^5 = 1 \Leftrightarrow k = 1$.

Assumiamo da qui in avanti $k = 1$, per cui le funzioni considerate sono le seguenti:
$f(x) = \sqrt{x}(1 - x)$ $\qquad$ $g(x) = x^2(x - 1)$
In **Fig. 1** sono rappresentati i loro grafici.
È evidenziata la regione piana S, compresa tra gli archi dei due grafici corrispondenti ai valori di x tali che $x \in [0; 1]$.

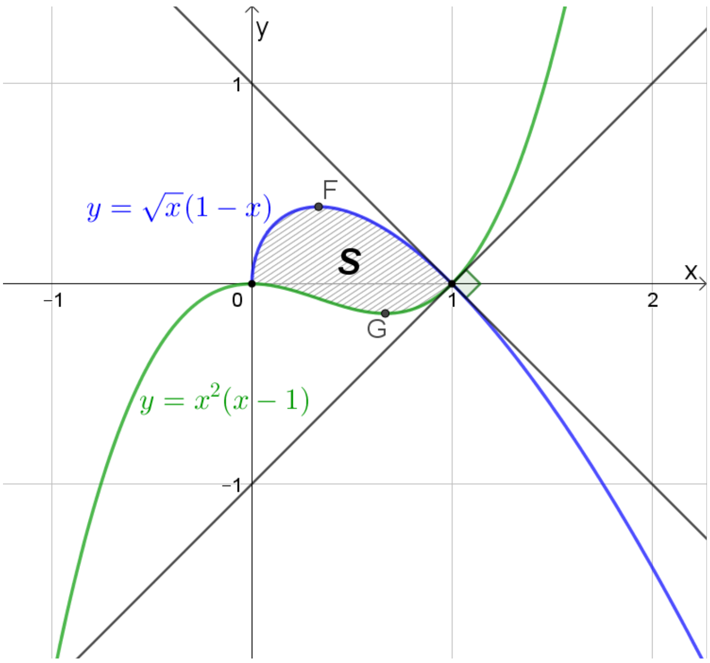

Figura 1

3. Il flusso del campo magnetico di intensità B_0 e perpendicolare alla regione piana S, attraverso S stessa, è dato da: $\Phi(\overrightarrow{B_0}) = B_0 A_S$.
Per valutarlo è necessario calcolare l'area A_S della regione:

$$A_S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\sqrt{x} - x^3 + x^2\right)dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Assumendo che il valore trovato fornisca la misura dell'area in m^2, otteniamo per il flusso:

$$\Phi(\overrightarrow{B_0}) = B_0 A_S = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T} \cdot 0{,}35\ \mathrm{m}^2 = 7{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb}.$$

4. Se il campo magnetico varia nel tempo secondo la legge fornita, anche il suo flusso varia nel tempo, per cui nella spira si genera una f.e.m indotta, data dalla legge di Faraday – Neumann – Lenz:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d(BA_S)}{dt} = -A_S\frac{dB}{dt} = A_S B_0 \omega e^{-\omega t}[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)].$$

Di conseguenza l'intensità della corrente indotta ha un andamento temporale dato da:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{A_S B_0 \omega}{R} e^{-\omega t}[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)].$$

È conveniente esprimere in modo elementare l'espressione lineare in seno e coseno fra parentesi quadre:

$$i(t) = \frac{A_S B_0 \omega}{R}\sqrt{2}e^{-\omega t}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

In **Fig. 2** riportiamo l'andamento temporale dell'intensità di corrente nei primi istanti.

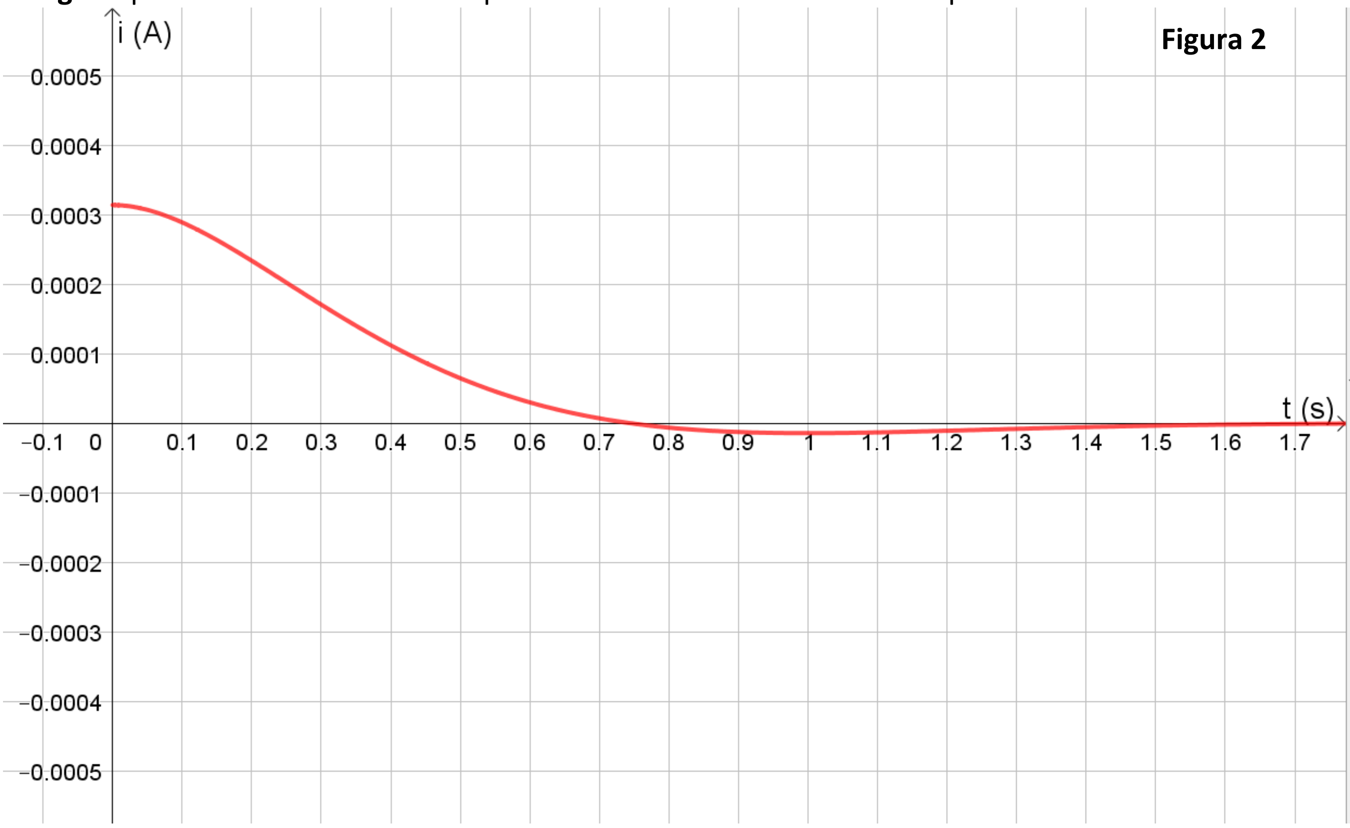

Figura 2

La corrente si annulla per la prima volta nell'istante in cui si ha:

$$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \omega t + \frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4\omega} = 0{,}75\ \mathrm{s}$$

In questo istante la corrente cambia verso per la prima volta.

Per identificare il valore massimo assunto dalla funzione $i(t)$ osserviamo che essa è una funzione oscillante smorzata da un fattore esponenziale. Di conseguenza è sufficiente identificare il primo punto di massimo relativo per ottenere il valore massimo raggiunto dalla funzione.

Calcoliamo la derivata:

$$i'(t) = \frac{A_S B_0 \omega}{R}\{-\omega e^{-\omega t}[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] + e^{-\omega t}\omega[-\sin(\omega t) + \cos(\omega t)]\} =$$

$$= \frac{A_S B_0 \omega^2}{R} e^{-\omega t}[-\cos(\omega t) - \sin(\omega t) - \sin(\omega t) + \cos(\omega t)] = -\frac{2A_S B_0 \omega^2}{R} e^{-\omega t}\sin(\omega t)$$

Osserviamo che il primo valore di t dell'intervallo $[0; +\infty[$ in cui $i'(t)$ cambia segno, passando da valori positivi a valori negativi, è $t = 0$.
Il valore massimo della corrente è quindi dato da:

$$i(0) = \frac{A_S B_0 \omega}{R}\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{0{,}35\ \mathrm{m}^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T} \cdot \pi\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{70\ \Omega} = 3{,}1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{A}$$

Per spiegare la relazione tra il verso della corrente e la variazione del campo, assumiamo che il campo magnetico sia inizialmente diretto nel verso uscente dalla pagina in **Fig. 1**.
In **Fig. 3** è riportato l'andamento del campo nei primi istanti.

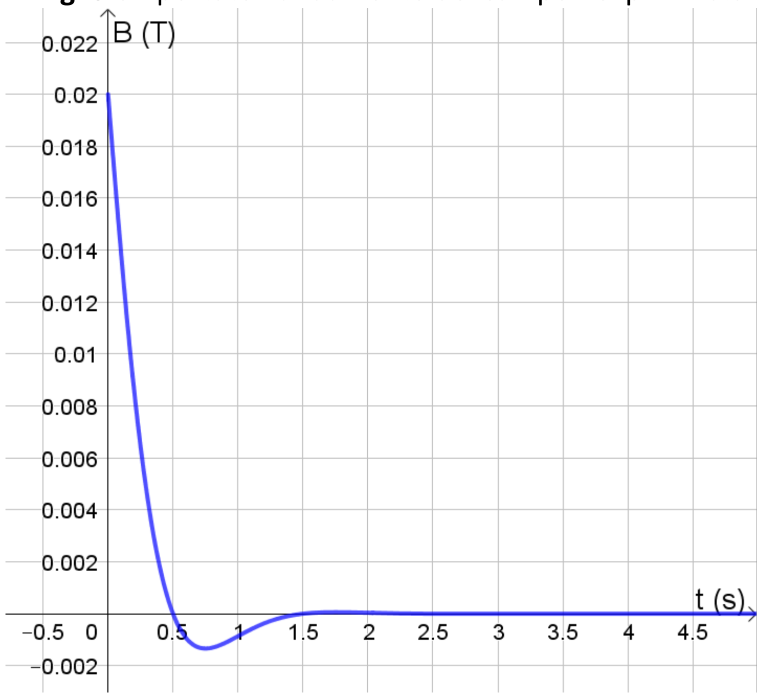

Figura 3

Siccome il modulo del campo magnetico nei primi 0,75 s diminuisce, la corrente deve compensare tale diminuzione, per cui ha verso antiorario.
Nel grafico in **Fig. 2**, gli intervalli in cui la funzione $i(t)$ è positiva corrispondono quindi a una corrente diretta in verso antiorario, mentre gli intervalli in cui la funzione $i(t)$ è negativa corrispondono a una corrente diretta in verso orario.
Nel grafico in **Fig. 3** gli intervalli in cui la funzione $B(t)$ è positiva corrispondono a un campo uscente dalla pagina, mentre gli intervalli in cui la funzione $B(t)$ è negativa corrispondono a un campo entrante nella pagina.
Quando il campo diminuisce, la corrente circola in verso antiorario, mentre quando il campo aumenta, la corrente circola in verso orario.