SOLUZIONE PROBLEMA 2

Punto 1

La costante a^2 è sommata al quadrato del tempo t, per cui anch'essa ha le dimensioni di un tempo. L'unità di misura di a è quindi il secondo (s).

Il secondo membro della legge che fornisce l'intensità del campo magnetico è una frazione che contiene a numeratore la costante k, moltiplicata per il tempo t e la distanza r dall'asse di simmetria, che è una lunghezza; a denominatore è invece presente la radice quadrata di un tempo elevato alla sesta, cioè, in definitiva, un tempo elevato alla terza.

La grandezza k, moltiplicata per una lunghezza e divisa per un tempo elevato alla seconda, deve quindi fornire l'intensità del campo magnetico:

$$[B] = \frac{[k][l]}{[t^2]} \quad \rightarrow \quad [k] = \frac{[B][t^2]}{[l]} = \frac{[F][t^2]}{[i][l^2]} = \frac{[E][t^3]}{[Q][l^3]} = \frac{[V][t^3]}{[l^3]}$$

L'unità di misura di k può quindi essere indicata come $\frac{\mathrm{Ts^2}}{\mathrm{m}}$ oppure equivalentemente come $\frac{\mathrm{Vs^3}}{\mathrm{m^3}}$.

Nel condensatore è presente un campo magnetico in quanto la differenza di potenziale applicata alle armature e, quindi, il campo elettrico tra esse esistente, è variabile nel tempo.

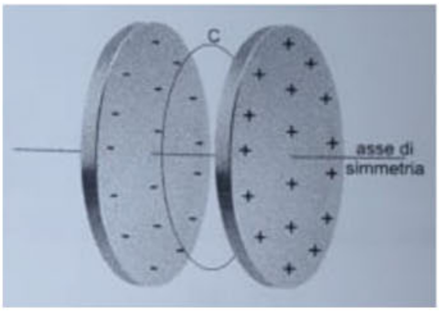
La circuitazione del campo magnetico è infatti fornita dalla legge di Ampère-Maxwell:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$$

dove γ indica la linea chiusa lungo cui viene calcolata la circuitazione di $\vec{B}$, ε_0 è la costante dielettrica del vuoto e μ_0 la permeabilità magnetica del vuoto.

Fra le armature del condensatore non sono presenti magneti o correnti di conduzione, ma è presente la cosiddetta corrente "di spostamento", $i_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$, dovuta alla variazione del flusso del campo elettrico.

Nel nostro caso la legge di Ampère-Maxwell prende la forma: $\oint_\gamma \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$.



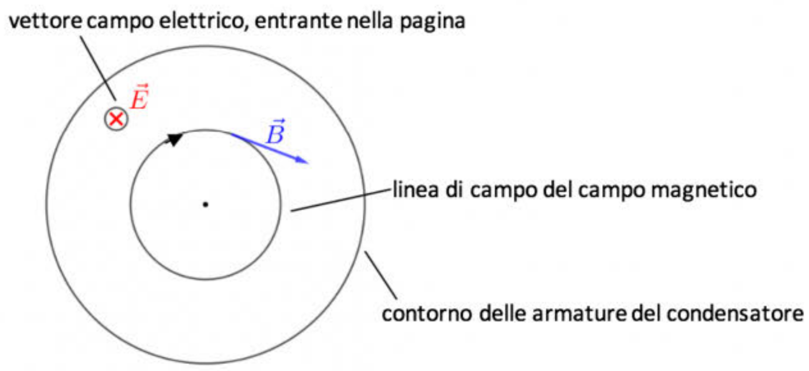
Facendo riferimento alla figura proposta nel testo del problema, il vettore campo elettrico $\vec{E}$ è diretto perpendicolarmente alle armature del condensatore, con verso che va dall'armatura carica positivamente all'armatura carica negativamente.

Le linee di campo di $\vec{B}$ sono circonferenze situate su piani paralleli alle armature, centrate sull'asse di simmetria del condensatore, come la circonferenza C indicata in figura.

Riferendoci alla circonferenza C, il verso delle linee di campo dipende dal segno di $\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$. Per $\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} > 0$ il verso è orario.

Il vettore $\vec{E}$ e il vettore $\vec{B}$ sono quindi perpendicolari fra loro in ogni istante e in ogni punto interno al condensatore.

Nella figura seguente è schematizzata la situazione.



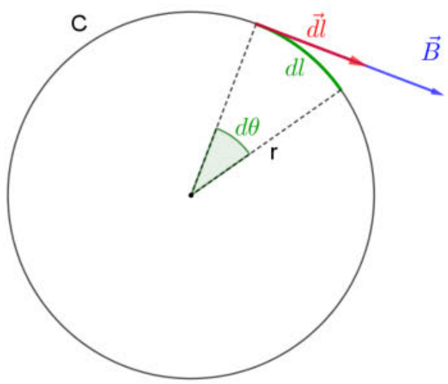
Punto 2

Determiniamo la circuitazione del campo magnetico lungo la circonferenza C utilizzando la definizione di circuitazione.

Si tratta di calcolare l'integrale $\oint_\gamma \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl}$.

Nella figura sotto è rappresentata la situazione geometrica:

- il vettore $\overrightarrow{dl}$ rappresenta lo spostamento infinitesimo lungo la circonferenza C; esso risulta parallelo al vettore $\vec{B}$, per cui si ha che $\vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = Bdl$, dove dl rappresenta lo spostamento infinitesimo sulla circonferenza, cioè la lunghezza dell'arco infinitesimo;
- per la relazione tra la lunghezza di un arco e l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente, possiamo scrivere $dl = rd\theta$.



L'integrale da calcolare prende quindi la seguente forma:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} Brd\theta = \frac{ktr^2}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi ktr^2}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}$$

Dalla legge di Ampère-Maxwell, applicata a questo caso, possiamo ricavare quanto segue:

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \quad\rightarrow\quad \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{2\pi ktr^2}{\mu_0\varepsilon_0\sqrt{(t^2+a^2)^3}} \quad\rightarrow\quad d\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi ktr^2}{\mu_0\varepsilon_0\sqrt{(t^2+a^2)^3}}dt$$

Integrando ambo i membri dell'ultima relazione e tenendo presente che all'istante $t=0$ la differenza di potenziale è nulla, per cui lo sono anche il campo elettrico e il suo flusso, si ottiene il flusso del campo elettrico all'istante t generico:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_0^t \frac{2\pi ktr^2}{\mu_0\varepsilon_0\sqrt{(t^2+a^2)^3}}dt = -\frac{2\pi kr^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right]_0^t = \frac{2\pi kr^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

Il risultato appena trovato rappresenta il flusso del campo elettrico attraverso il cerchio delimitato dalla circonferenza C. Esso può anche essere scritto come: $\Phi(\vec{E}) = \pi r^2 E$.
Uguagliando le due espressioni, troviamo l'intensità del campo elettrico:

$$\pi r^2 E = \frac{2\pi kr^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right) \quad\rightarrow\quad E = \frac{2k}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

Dal momento che il campo elettrico può essere considerato uniforme all'interno del condensatore, possiamo scrivere la seguente relazione tra la d.d.p. tra le armature e l'intensità del campo:

$$\Delta V = Ed = \frac{2kd}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

Calcoliamo infine il valore a cui tende l'intensità del campo magnetico al trascorrere del tempo:

$$\lim_{t\to+\infty}|\vec{B}| = \lim_{t\to+\infty}\frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} = 0$$

(per $t\to+\infty$ il denominatore è un infinito di ordine superiore rispetto al numeratore).
Questo fatto può essere spiegato considerando che, per $t\to+\infty$, anche la d.d.p. tra le armature tende al suo valore limite: $\Delta V_\infty = \frac{2kd}{\mu_0\varepsilon_0 a}$.
A questo punto non è più possibile caricare ulteriormente il condensatore: d.d.p., campo elettrico e flusso del campo elettrico tendono a diventare costanti, la corrente di spostamento tende a zero e così pure il campo magnetico da essa generato.
Il risultato che abbiamo ottenuto è coerente con le unità di misura scelte per k e a. Infatti basta ricordare che $\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = c^2$ e sostituendo otteniamo:

$$[V] = \frac{[V][t^3]}{[l^3]}\cdot\frac{[l^2]}{[t^2]}\cdot\frac{[l]}{[t]}$$

Punto 3

Per verificare che la funzione $F(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}-\frac{1}{a}$ è una primitiva della funzione $f(t)=-\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$ basta eseguire la derivata prima della funzione $F(t)$.

Si ottiene: $F'(t)=D\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{2}(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2t=-\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$.

La funzione $F(t)$ è definita su **R**, derivabile e continua; è pari perché $F(-t)=F(t)$.

Inoltre $F(0)=0$, dunque il suo grafico passa per l'origine.

Si ha:

$$\lim_{t\to\infty} F(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}$$

Quindi la retta di equazione $y=-\frac{1}{a}$ è asintoto orizzontale del grafico della funzione.

Poiché conosciamo la derivata prima $f(t)=-\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$ di $F(t)$, è immediato riconoscere che la $F(t)$ ha un massimo relativo (e anche assoluto) per *t*=0. Il punto di massimo è l'origine *O*(0,0).

La derivata seconda di $F(t)$ è la derivata prima di $f(t)$. Si ha pertanto:

$$F''(t)=f'(t)=D\left(-\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\right)=-(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}-t\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(t^2+a^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2=$$

$$=\frac{2t^2-a^2}{\sqrt{(t^2+a^2)^5}}$$

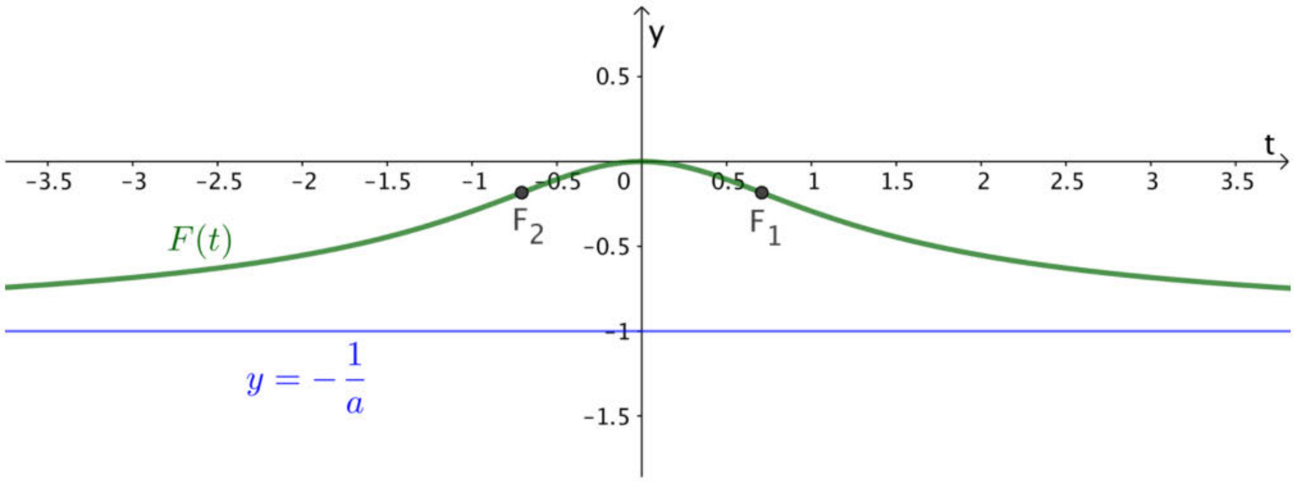
Studiando il segno della derivata seconda si trova che la funzione $F(t)$ ha due flessi nei punti di ascissa $x=\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$, simmetrici rispetto all'asse *y* (la funzione $F(t)$ è pari).

In tali punti il valore dell'ordinata è $F\left(\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}-3}{3a}$.

Le pendenze delle rette tangenti in tali punti saranno pertanto:

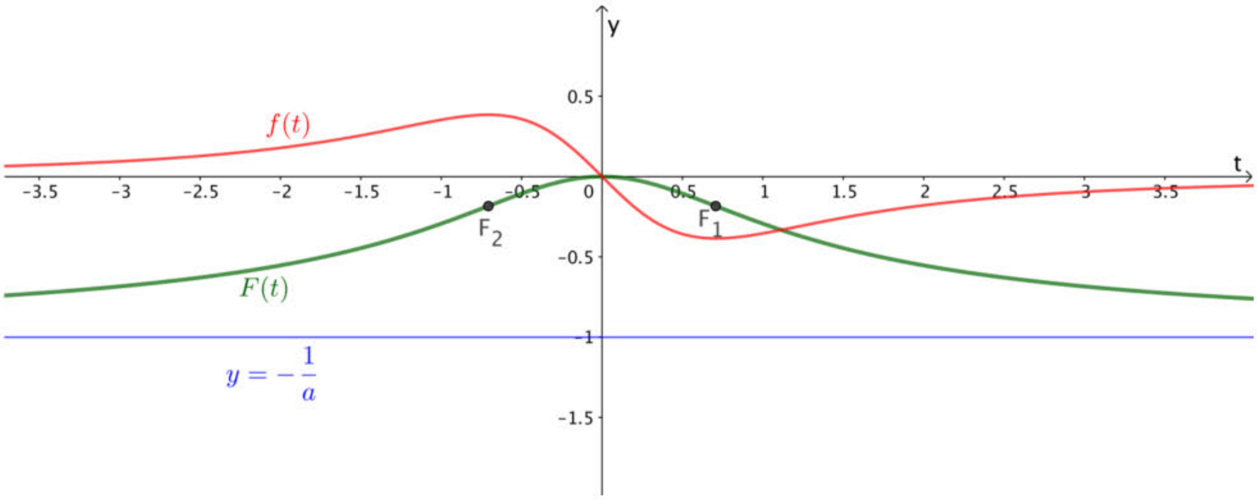
$$f\left(\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\mp\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$$

Il grafico della funzione *F*(*t*) è il seguente (F_1 e F_2 sono i due punti di flesso).



Punto 4

Nella figura seguente sono riportati il grafico di $f(t)$ (in rosso) e il grafico di $F(t)$ (in verde). Il grafico di $f(t)$ rappresenta il grafico della derivata della funzione $F(t)$.



Per $t < 0$, $f(t)$ è positiva perché la funzione $F(t)$ è crescente;

Per $t > 0$, $f(t)$ è negativa perché la funzione $F(t)$ è decrescente;

Per *t*=0, si ha $f(0) = 0$; la funzione $F(t)$ ha un massimo relativo (e assoluto) nell'origine.

Le ascisse dei punti di flesso $t = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$ della funzione $F(t)$ rappresentano rispettivamente le ascisse dei punti di massimo e di minimo della funzione $f(t)$.

Poiché la funzione $F(t)$ è pari, la sua derivata prima $f(t)$ è dispari. La derivata seconda di $F(t)$ è la derivata prima di $f(t)$ e sarà a sua volta pari.

Poiché la funzione $f(t)$ è dispari, si ha

$$\int_{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} f(t)\,dt = 0$$

e più in generale fissato $b > 0$:

$$\int_{-b}^{b} f(t)\, dt = 0$$

Le rette parallele all'asse delle ordinate che delimitano la regione di piano di cui calcolare l'area hanno equazione $t = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tale regione è evidenziata nella figura seguente e, poiché f(t) è dispari, essa è composta da due parti di uguale area.

Perciò per calcolare l'area totale basterà per esempio calcolare della regione corrispondente a $-\frac{a\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 0$ e poi raddoppiare il valore ottenuto:

$$A = 2\int_{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{0} f(t)dt = [F(t)]^{0}_{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2\left[0 - \left(\frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2}} - \frac{1}{a}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}a^2}}\right) = 2\left(\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$