SOLUZIONE QUESITO 1

La funzione *f* presenta un asintoto orizzontale di equazione *y* = 5, cioè si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 5$, perciò *p*(*x*) ha grado 2 e il coefficiente del termine di grado massimo di *p*(*x*) è 5. Inoltre la funzione *f* interseca l'asse *x* nei punti di ascisse 0 e $\frac{12}{5}$, perciò il polinomio *p*(*x*) ha come zeri $x = 0$ e $x = \frac{12}{5}$.

Pertanto, *p*(*x*) è della forma:

$p(x) = 5(x-0)\left(x - \frac{12}{5}\right) = x(5x-12)$ [*]

La funzione *f* ha come asintoti verticali le rette $x = -3$ e $x = 3$, perciò si ha:

$$\lim_{x\to\pm 3} f(x) = \infty$$

Poiché *p*(*x*) è della forma [*], si ha $\lim_{x\to\pm 3} f(x) = \infty$ se e solo se il denominatore di $f(x)$ si annulla per $x = -3$ e per $x = 3$, cioè quando risulta:

$$(-3)^2 + d = 0 \text{ e } (+3)^2 + d = 0 \ \to\ 9 + d = 0 \ \to\ d = -9$$

In definitiva, l'espressione analitica della funzione *f* è:

$$f(x) = \frac{x(5x-12)}{x^2-9} = \frac{5x^2-12x}{x^2-9}$$

Per determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione *f*, calcoliamo la derivata prima di *f*:

$$f'(x) = \frac{(10x-12)(x^2-9) - 2x(5x^2-12x)}{(x^2-9)^2} = \frac{12x^2-90x+108}{(x^2-9)^2} = \frac{6(2x^2-15x+18)}{(x^2-9)^2}$$

Imponendo *f'*(*x*) = 0 si ricavano i punti stazionari della funzione *f*:

$$f'(x) = 0 \ \to\ \frac{6(2x^2-15x+18)}{(x^2-9)^2} = 0 \ \to\ 2x^2-15x+18 = 0 \ \to\ x = \frac{15 \pm \sqrt{225-144}}{4} = \frac{15 \pm 9}{4}$$

Da cui risulta:

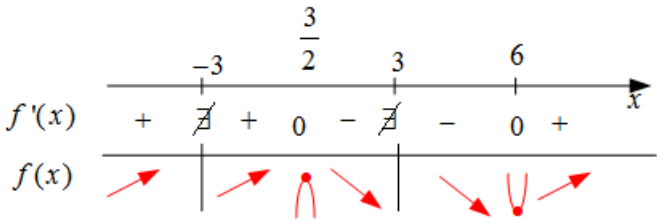
$$x_1 = \frac{3}{2}, \ \ x_2 = 6$$

Inoltre si ha che:

$f'(x) > 0 \to x < \frac{3}{2} \vee x > 6$, con $x \neq -3$;

$f'(x) < 0 \to x < \frac{3}{2} < x < 6$, con $x \neq 3$.

Lo schema del segno della derivata è il seguente:



Da esso di si deduce che:

- $x = \frac{3}{2}$ è punto di massimo relativo per la funzione *f*;
- $x = 6$ è punto di minimo relativo per la funzione *f*.