SOLUZIONE QUESITO 4

Consideriamo un generico punto $P(x, y, z)$ dello spazio e imponiamo la condizione $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$.
Si ottiene l'equazione:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{2}\,\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

da cui, elevando al quadrato:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2(x+2)^2 + 2(y-2)^2 + 2(z-1)^2$$

Svolgendo i quadrati e semplificando si ottiene l'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ 12x - 8y - 6z + 13 = 0 \quad [*]$$

che rappresenta una superficie sferica avente centro in:

$$C\left(-\frac{12}{2},\ -\frac{-8}{2},\ -\frac{-6}{2}\right), \text{ cioè } C(-6, 4, 3)$$

e raggio:

$$r = \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 3^2 - 13} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Il punto $T(-10, 8, 7)$ appartiene a *S*, infatti si verifica che le sue coordinate soddisfano l'equazione [*].
Il piano tangente in *T* a *S* ha equazione del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0$$

ed è ortogonale al vettore *CT* che ha come componenti:

$$(-10 + 6, 8 - 4, 7 - 3) = (-4, 4, 4)$$

Pertanto l'equazione del piano è del tipo:

$$-4x + 4y + 4z + d = 0$$

Per determinare il coefficiente *d* è sufficiente imporre il passaggio per *T*:

$$-4(-10) + 4(8) + 4(7) + d = 40 + 32 + 28 + d = 100 + d = 0$$

Si ottiene $d = -100$ e l'equazione del piano tangente cercato è dunque:

$$-4x + 4y + 4z - 100 = 0$$

ossia, dividendo i due membri per -4:

$$x - y - z + 25 = 0$$