SOLUZIONE QUESITO 1

QUESITO 1
La funzione $y = g(x)$ è certamente continua e derivabile per ogni $x \neq 3$ e $x \neq 1$.
Studiamo la funzione g nel punto $x = 1$.
Risulta:

$$g(1) = 3 - a = \lim_{x \to 1^-}(3 - ax^2)$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+}\left(\frac{b}{x-3}\right) = -\frac{b}{2}$$

Pertanto la funzione g sarà continua in $x = 1$ se e solo se:

$$3 - a = -\frac{b}{2}$$

La derivata della funzione è:

$$g'(x) = \begin{cases} -2ax & per \quad x < 1 \\ -\dfrac{b}{(x-3)^2} & per \quad x > 1 \end{cases}$$

Supposto che la funzione sia continua, essa risulta derivabile in $x = 1$ se e solo se la derivata destra e quella sinistra coincidono. Poiché:

$$g_-^{'}(1) = \lim_{x \to 1^-} g'(x) = -2a \quad \text{e} \quad g_+^{'}(1) = \lim_{x \to 1^+} g'(x) = -\frac{b}{4}$$

la funzione g sarà derivabile in $x = 1$ se e solo se:

$$-2a = -\frac{b}{4}$$

Risolvendo il sistema:

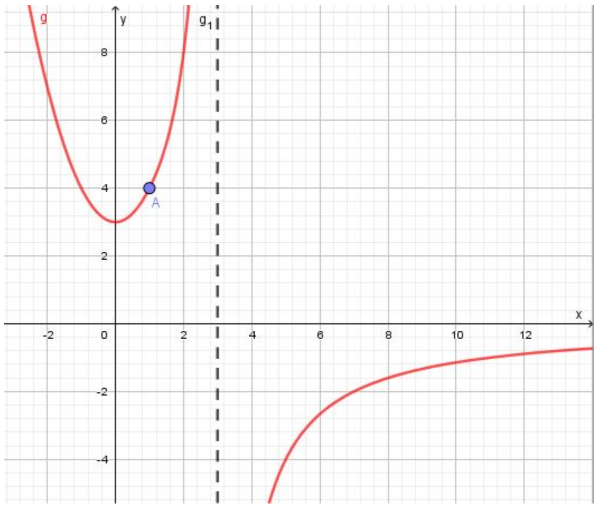
$$\begin{cases} 3 - a = -\dfrac{b}{2} \\ -2a = -\dfrac{b}{4} \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} 2a-6=b \\ b=8a \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-8 \end{cases}$$

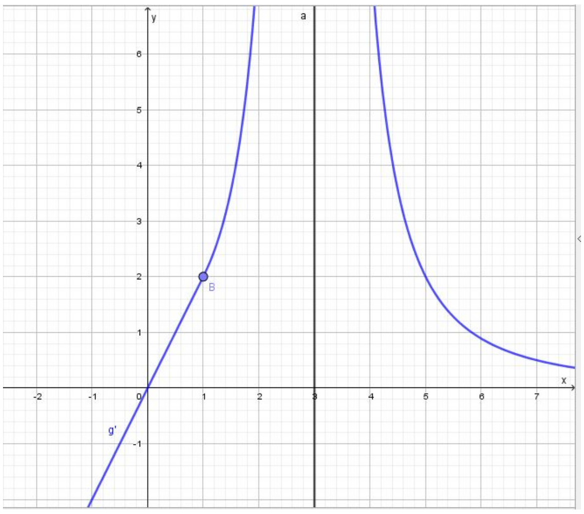
La funzione $y=g(x)=\begin{cases} 3+x^2 & per \quad x\le 1 \\ -\dfrac{8}{x-3} & per \quad x>1 \end{cases}$:

- per $x\le 1$ ha come grafico un arco di parabola, passante per il punto $A(1;4)$, con vertice in $V(0;3)$ e concavità rivolta verso l'alto;
- per $x>1$ ha come grafico due archi di iperbole, con asintoti verticale $x=3$ e orizzontale $y=0$.



La funzione derivata $y=g'(x)=\begin{cases} 2x & per \quad x\le 1 \\ \dfrac{8}{(x-3)^2} & per \quad x>1 \end{cases}$:

- per $x\le 1$ ha come grafico una semiretta passante per l'origine con coefficiente angolare 2, passante per il punto $B(1;2)$;
- per $x>1$ è una funzione sempre positiva, il cui grafico passa per il punto $B(1;2)$ e ha un asintoto verticale di equazione $x=3$ (perché $\lim_{x\to 3}\dfrac{8}{(x-3)^2}=+\infty$) e un asintoto orizzontale destro di equazione $y=0$ (perché $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{8}{(x-3)^2}=0^+$).



Si noti che $g''(x)=\begin{cases} 2 & per \quad x<1 \\ -\dfrac{16}{(x-3)^3} & per \quad x>1 \end{cases}$ e che $\lim_{x\to 1^-} g''(x)=\lim_{x\to 1^+} g''(x)=2$, pertanto la funzione g' è derivabile in $x=1$, con derivata uguale a 2.